

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JEDEN A DVĚ 2

Popis aktivity

Určení rovnice přímky v rovině, rovnice kružnice a rovnice tečny k dané kružnici.

Předpokládané znalosti

Směrový a normálový vektor, soustava lineární a kvadratické rovnice, charakteristiky kružnice

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulačka, pracovní list pro žáka

Zadání

V rovině soustavy souřadnic je dán pouze jeden bod $P [8; 4]$.

Úkoly:

1. Určete obsah obdélníku $OXPY$, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod P je jeho jedním vrcholem a bod X leží na ose x .
2. Napište parametrické, obecné a směrové tvary rovnic přímek stran tohoto obdélníku, které neprocházejí bodem P .
3. Napište středové a obecné rovnice dvou kružnic maximálního obsahu vepsaných do uvedeného obdélníku.
4. Napište parametrické, obecné a směrové tvary rovnic tečen k hledaným kružnicím, které procházejí bodem P a nejsou stranami obdélníku.
5. Určete souřadnice průsečíků vepsaných kružnic a úhlopříčky, která prochází bodem P .

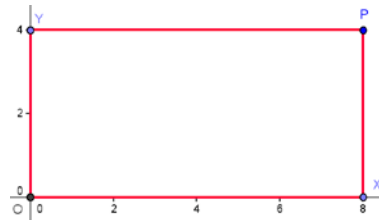
Možný postup

1. Vrcholy obdélníku $OXPY$ mají následující souřadnice:

$O [0; 0]$, $X [8; 0]$, $P [8; 4]$, $Y [0; 4]$. Obsah obdélníku je $32 j^2$.

2. a) Parametrické tvary: směrový vektor přímky \vec{OX} je $(8; 0)$:

$$\vec{OX}: \begin{cases} x = 8 + 8t \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \in R$$



$$\vec{OY}: x = 0$$

$$y = 4 + 4s, \quad s \in R$$

směrový vektor přímky \vec{OY} je $(0; 4)$:

b) Obecné tvary: normálový vektor přímky \vec{OX} je $(0; 8)$: $\vec{OX}: y = 0$

normálový vektor přímky \vec{OY} je $(4; 0)$: $\vec{OY}: x = 0$

c) Směrové tvary: směrnice přímky \vec{OX} je $k = 0$: $\vec{OX}: y = 0$

směrnice přímky \vec{OY} není definována; rovnici nelze napsat.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. Jedná se o dvě kružnice se stejně velkým poloměrem

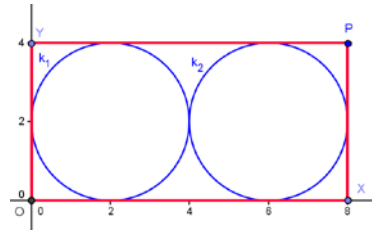
$$r_1 = r_2 = 2, S_1 [2; 2], S_2 [6; 2].$$

a) Středové rovnice:

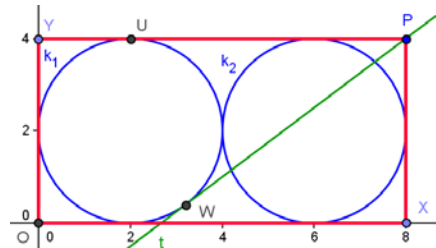
$$k_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad ; \quad k_2: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$$

b) Obecné rovnice:

$$k_1: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad ; \quad k_2: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$$



4. Existuje jen jedno takové řešení – jedna tečna z bodu P ke kružnici k_1 :



$$k_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x-2) + (y-2)(y-2) = 4.$$

$$\text{Rovnice poláry } q: (x_p - 2)(x - 2) + (y_p - 2)(y - 2) = 4$$

$$(8 - 2)(x - 2) + (4 - 2)(y - 2) = 4$$

$$q: 3x + y - 10 = 0$$

$$\text{Průsečík kružnice a poláry: } k_1 \cap q: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad \wedge \quad q: 3x + y - 10 = 0$$

$$q: y = 10 - 3x \Rightarrow x^2 + (10 - 3x)^2 - 4x - 4(10 - 3x) + 4 = 0$$

$$5x^2 - 26x + 32 = 0 \Rightarrow D = 36 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm 6}{10}$$

$$k_1 \cap q = \{W\}, W [3, 2; 0, 4]$$

$$k_1 \cap q = \{U\}, U [2; 4] \quad \text{– tento bod není pro úkol 4. podstatný.}$$

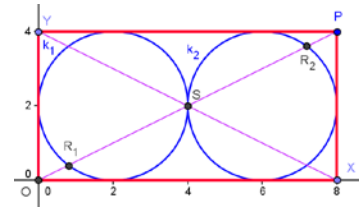
Parametrický tvar rovnice tečny $t = \overleftrightarrow{PW}$:

$$t: x = 8 - 4,8m$$

$$y = 4 - 3,6m \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

Obecný tvar rovnice tečny $t = \overleftrightarrow{PW}$: $t: 3x - 4y - 8 = 0$

Směrnice tvar rovnice tečny $t = \overleftrightarrow{PW}$: $t: y = \frac{3}{4}x - 2$



5. Řešením jsou tři body; jeden je v bodě dotyku S těchto dvou kružnic a je zároveň středem úsečky, která druhé dva body průsečíků R_1, R_2 spojuje (a také středem úhlopříčky obdélníku). Stačí tedy určit souřadnice jednoho z těchto dvou krajních bodů úsečky $|R_1R_2|$.

$$\text{Rovnice úhlopříčky } u = \overleftrightarrow{OP}: x - 2y = 0$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Průsečík kružnice a úhlopříčky: $k_1 \cap u: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \wedge u: x - 2y = 0$

$$u: x = 2y \Rightarrow (2y)^2 + y^2 - 4(2y) - 4y + 4 = 0$$

$$5y^2 - 12y + 4 = 0 \Rightarrow D = 64 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{10}$$

$$k_1 \cap u = \{ R_1; S \}, \quad R_1 [0,8; 0,4], \quad S [4; 2]$$

$$k_2 \cap u = \{ R_2 \}; \quad 2S - R_1 = R_2 [7,2; 3,6]$$

Doplňkové aktivity

1. Vypočítejte obsah útvaru, který vznikne z obdélníku *OXPY* vyjmutím obou vepsaných kružnic.
2. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která má střed v průsečíku úhlopříček obdélníku a prochází body R_1, R_2 .

Je vhodné využít obrázku popř. matematického grafického software – Cabri, Geonext, Geogebra aj.
Pro výpočty využít program Mathematica, Maxima, Matlab, Maple, Derive aj.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	Dílo autora