JEHLAN 1

Popis aktivity

Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru.

Předpokládané znalosti

Směrový a normálový vektor, obecná rovnice roviny a parametrický tvar rovnice přímky a roviny

Potřebné pomůcky

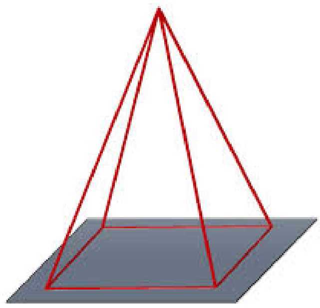
kalkulátor, tabulky, pracovní list pro žáka

Zadání

Je zadána rovnice roviny $\rho: \; x-2y+z+5=0$, bod $V[4;1;-1]$ a bod $P[1;2;-2]$.

Úkoly:

1. Ověřte, jestli některý z bodů V nebo P leží v rovině ρ.
2. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky $h=PV$ a roviny ρ.
3. Napište rovnice přímek v a p, které jsou kolmé k rovině ρ a procházejí body V a P.
4. Určete souřadnice průsečíku S přímky v s rovinou ρ.
5. Vypočtěte vzdálenost bodu V od roviny ρ.
6. Určete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v rovině ρ, jestliže vzdálenost bodu V od roviny ρ je rovna délce tělesové výšky jehlanu a bod P je vrcholem podstavy.



Možný postup

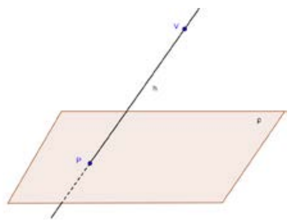
1. Leží-li bod v dané rovině, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici této roviny:

$$V \in \rho \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot 4-2\cdot 1+1\cdot(-1)+5=0$$
$$6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad V \notin \rho$$

Bod V **neleží** v rovině ρ.

$$P \in \rho \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot 1-2\cdot 2+1\cdot(-2)+5=0$$
$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \rho$$

Bod P **leží** v rovině ρ.



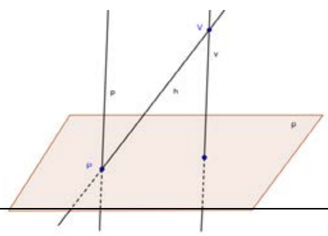
2. Protože bod V neleží v rovině ρ, je přímka $h=PV$ s rovinou různoběžná.

A protože pro vektory platí: $\vec{n}_\rho \neq k\cdot \vec{PV}$, není přímka kolmá k dané rovině; svírá s ní tedy ostrý úhel.

3. Normálový vektor roviny ρ je směrovým vektorem obou hledaných přímek v i p.

$$\vec{n}_\rho = (1;-2;1) = \vec{s}_v = \vec{s}_p \quad \Rightarrow$$

$$v: \; \begin{aligned} x &= 4+t \\ y &= 1-2t \\ z &= -1+t \end{aligned} \quad , \qquad p: \; \begin{aligned} x &= 1+w \\ y &= 2-2w \\ z &= -2+w \end{aligned}$$



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

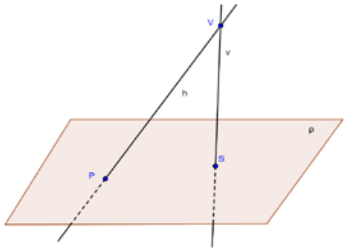
4. Úkol řešte jako soustavu rovnic dosazovací metodou:

$$1\cdot(4+t)-2\cdot(1-2t)+1\cdot(-1+t)+5=0$$

$$\Rightarrow \quad t=-1$$

Takže pro souřadnice průsečíku přímky a roviny platí:

$$v\cap\rho=S\,[3;3;-2].$$



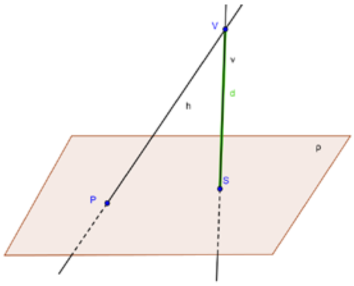
5. Použijte např. vzorec pro vzdálenost bodu od roviny:

$$d=\frac{|1\cdot 4-2\cdot 1+1\cdot(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6}\doteq \underline{\underline{2{,}45}}$$

Také bylo možno použít vzorec pro vzdálenost dvou bodů v prostoru:

$$d=|SV|.$$

Bod V je od roviny ρ vzdálen asi 2,45 délkových jednotek.

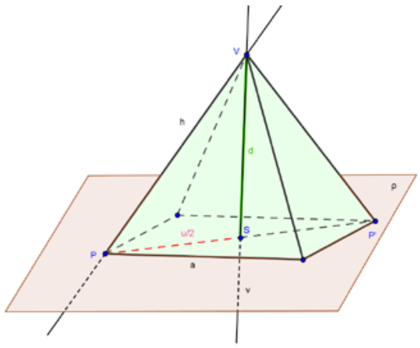


6. Pro výpočet objemu jehlanu spočtěte ještě plochu jeho čtvercové podstavy, kde vzdálenost $|PS|$ je rovna polovině délky její úhlopříčky: $|PS|=\sqrt{5}=\dfrac{u}{2}$

Obsah podstavy je tedy: $O=\dfrac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{2}\cdot 4=\dfrac{\sqrt{5}^2}{2}\cdot 4=10$

$$V=\frac{1}{3}\cdot O\cdot d=\frac{1}{3}\cdot 10\cdot\sqrt{6}\doteq \underline{\underline{8{,}165}}$$

Objem jehlanu je asi 8,165 krychlových jednotek.



Doplňkové aktivity

1. Napište obecnou i parametrickou rovnici roviny ϕ, která prochází bodem V a je s rovinou ρ rovnoběžná.
2. Napište rovnice přímek, ve kterých leží jedna a druhá úhlopříčka podstavy tohoto jehlanu.
3. Napište obecné i parametrické rovnice rovin osového řezu jehlanu.
4. Napište rovnici přímky, ve které leží hrana SV tohoto jehlanu.
5. Vypočtěte úhel hrany jehlanu od jeho podstavy.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	images.google.com, dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.