evropský sociální fond v ČR — EVROPSKÁ UNIE — MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY — OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost — Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# JEHLAN 2

**Popis aktivity**

Výpočet průsečíku přímky a roviny v prostoru. Výpočet úhlu vektorů v prostoru.

**Předpokládané znalosti**

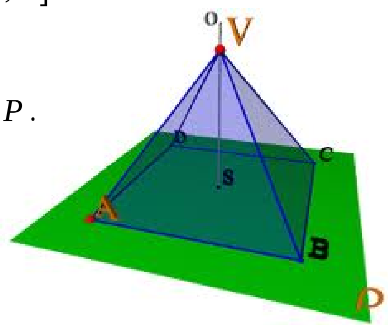
Směrový a normálový vektor, obecná rovnice roviny a parametrický tvar rovnice přímky v prostoru

**Potřebné pomůcky**

Kalkulátor, pracovní list pro žáka

**Zadání**

Je zadána rovnice roviny $\rho:\ x+2y-2z+5=0$, její bod $P[x;0;1]$ a bod $V[3;3;1]$.




Úkoly:

1. Ověřte, zda bod $V$ leží v rovině $\rho$ a určete souřadnice bodu $P$.
2. Napište obecný a parametrický tvar rovnice roviny $\alpha$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho$ a prochází bodem $V$.
3. Napište rovnici přímky $o$, která je kolmá k rovině $\rho$ a prochází bodem $V$.
4. Určete souřadnice průsečíku $S$ přímky $o$ s rovinou $\rho$.
5. Vypočtěte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$ v rovině $\rho$, je-li bod $S$ středem čtvercové podstavy a bod $P$ je středem hrany podstavy jehlanu.
6. Vypočtěte úhel roviny stěny jehlanu od roviny jeho podstavy.

**Možný postup**

1. Leží-li bod v dané rovině, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici této roviny:


$$V\in\rho \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot 3+2\cdot 3-2\cdot 1+5=0$$

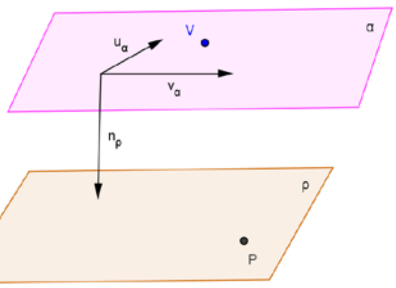
$$12\neq 0 \quad \Rightarrow \quad V\notin\rho$$

Bod $V$ **neleží** v rovině $\rho$.

$$P\in\rho \quad \Leftrightarrow \quad 1\cdot x_P+2\cdot 0-2\cdot 1+5=0$$

$$x_P=-3 \quad \Rightarrow \quad P[-3;0;1]\in\rho$$

Bod $P$ **leží** v rovině $\rho$.




2. Obecný tvar rovnice roviny $\alpha$:

$$\vec{n}_\rho=(1;2;-2)=\vec{n}_\alpha \quad \wedge \quad V[3;3;1]\in\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\alpha:\ x+2y-2z-8=0$$

Parametrický tvar rovnice roviny $\alpha$:

Hledáme libovolné dva směrové lineárně nezávislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ v prostoru, které jsou oba kolmé na normálový vektor roviny $\alpha$.

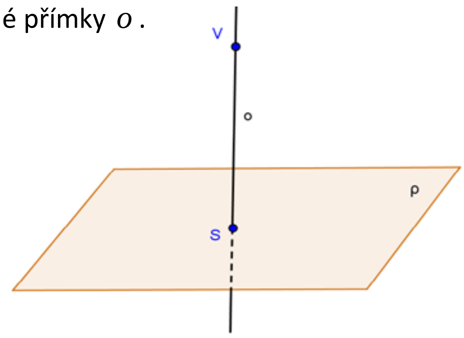
Je-li $\vec{n}_\alpha = (1;2;-2)$, potom je např. $\vec{u}_\alpha = (2;1;2)$ a $\vec{v}_\alpha = (2;-1;0) \quad \wedge \quad \vec{u}_\alpha \neq k \cdot \vec{v}_\alpha$.

Zároveň platí: $\vec{u}_\alpha \times \vec{v}_\alpha = m \cdot \vec{n}_\alpha$, kde $k, m \in R$.

Můžeme tedy psát:
$$\alpha: \quad \begin{aligned} x &= 3 + 2w + 2q \\ y &= 3 + w - q \\ z &= 1 + 2w \end{aligned} \quad \text{, kde } w, q \in R.$$

3. Normálový vektor roviny $\rho$ je směrovým vektorem hledané přímky $o$.

$$\vec{n}_\rho = (1;2;-2) = \vec{s}_o \quad \Rightarrow \quad o: \quad \begin{aligned} x &= 3 + t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 1 - 2t \end{aligned}$$




4. Úkol řešte jako soustavu rovnic dosazovací metodou:

$$1 \cdot (3+t) + 2 \cdot (3+2t) - 2 \cdot (1-2t) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{4}{3}$$

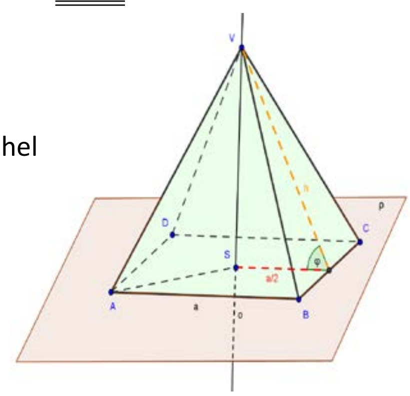
Pro souřadnice průsečíku přímky a roviny platí: $o \cap \rho = S\left[\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right]$.

5. Pro výpočet povrchu jehlanu je třeba určit výšku stěny $h$ a délku hrany $a$ čtvercové podstavy. Je-li bod $P$ střed hrany čtvercové podstavy jehlanu a bod $S$ průsečík jejích úhlopříček, je vzdálenost $|PS|$ rovna polovině délky hrany podstavy: $|PS| = \sqrt{29} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{29}$.

Výška stěny jehlanu je $h = |PV| = 3\sqrt{5}$.

Povrch jehlanu je: $Q = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = \left(2\sqrt{29}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2\sqrt{29} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = \underline{\underline{260{,}5}}$

Povrch jehlanu je 260,5 čtverečných jednotek.




6. Úhel roviny stěny jehlanu od jeho podstavy lze řešit např. jako úhel vektorů v prostoru nebo jako úlohu ve stereometrii.

$$\overrightarrow{PS} = \left(\frac{14}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right) \quad , \quad \overrightarrow{PV} = (6;3;0)$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PV}}{\left|\overrightarrow{PS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PV}\right|} = \frac{24+1+0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{45}} \doteq 0{,}6920$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 46°12'41''}}$$

Stěna jehlanu svírá s podstavou úhel o velikosti $46°12'41''$.

| Doplňkové aktivity | |
|---|---|
| 1. Napište obecnou i parametrickou rovnici roviny $\phi$, která prochází body $VSP$.<br>2. Napište rovnice přímek, ve kterých leží tělesová výška tohoto jehlanu.<br>3. Vypočtěte úhel hrany jehlanu od jeho podstavy. | |
| **Literatura** | Archiv autora |
| **Obrazový materiál** | images.google.com, dílo autora |

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*