evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KDO LÉPE DERIVUJE 1

Popis aktivity

Hledání chyb ve výpočtu derivací.

Předpokládané znalosti

Vzorce pro úpravu výrazů, základní vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Potřebné pomůcky

Pracovní list pro žáka

Zadání

Tři chlapci Aleš, Mirek a Zdeněk se rozhodli, že si dají závod, kdo lépe a rychleji derivuje. Vybrali si následujících deset příkladů:

1. $y=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot x-3$, 2. $y=3\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$, 3. $y=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$, 4. $y=x\cdot\ln x$,

5. $y=x^2\cdot\cos x$, 6. $y=\mathrm{tg}x-x$, 7. $y=x\cdot\mathrm{e}^x$, 8. $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$, 9. $y=\frac{1+x^2}{x^2-1}$,

10. $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

Aleš skončil za 15 minut, Mirek za 17 minut a Zdeněk za 20 minut. Jejich výsledky najdete v přiložené tabulce. Rozhodněte, kdo z nich byl nejlepší.

Příklad	Aleš	Mirek	Zdeněk
1.	x^2-x+2	$2\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+3$	$\frac{1}{3}\cdot x^3-2\cdot x+2$
2.	$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$
3.	$\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2\cdot x^2}$	$\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2\cdot x^2}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}$
4.	$\ln x+1$	$\frac{1}{x}+1$	$\frac{1}{x}+\ln x$
5.	$2\cdot x\cdot\cos x+x^2\cdot\sin x$	$2\cdot x\cdot\cos x-x^2\cdot\sin x$	$2\cdot x\cdot\cos x+x^2\cdot\sin x$
6.	$-\frac{1}{\sin^2 x}-1$	$\frac{1}{\cos^2 x}-1$	$\mathrm{tg}^2 x$
7.	$\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x$	$\mathrm{e}^x\cdot(1+x)$	$\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x$
8.	$\frac{1}{1+\sin 2x}$	$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}$	$\frac{1}{1+2\cdot\sin x\cdot\cos x}$
9.	$\frac{4x}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{4\cdot x}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{4\cdot x^3}{(x^2-1)^2}$
10.	$-\frac{2}{1+\sin 2x}$	$\frac{2}{\sin 2x-1}$	$-\frac{2}{1-2\cdot\sin x\cdot\cos x}$

Možný postup řešení, metodické poznámky

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je F. Procházka.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení jednotlivých příkladů:

1. $y' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x + 2 = x^2 - x + 2,$

2. $y = 3\cdot x^{-\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\cdot\sqrt{x}},$

3. $y = x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} - \frac{1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2\cdot x^2},$

4. $y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1,$ 5. $y' = 2\cdot x\cdot\cos^2 x - x^2\cdot\sin x,$

6. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x,$ 7. $y' = e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(1+x),$

8. $y' = \frac{\cos x\cdot(\sin x + \cos x) - \sin x\cdot(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin 2x},$

9. $y' = \frac{2\cdot x\cdot(x^2-1) - 2\cdot x\cdot(1+x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2\cdot x^3 - 2\cdot x - 2\cdot x - 2\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = -\frac{4\cdot x}{(x^2-1)^2},$

10. $y' = \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)\cdot(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$

$$= -\frac{2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x} = -\frac{2}{1+\sin 2x}.$$

Nejlépe derivoval Mirek, který dobře spočítal 7 příkladů. Aleš měl dobře 6 příkladů a Zdeněk měl dobře 5 příkladů.

Doplňkové aktivity	
Učitel má možnost žákům vytvořit celou řadu podobných příkladů, kde si procvičí pravidla pro derivování.	
Literatura	Archiv autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je F. Procházka.
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.