evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INTEGRÁLNÍ SÍTO 1

Popis aktivity

Výpočet základních integrálů.

Předpokládané znalosti

Funkce, úpravy výrazů, pravidla pro integrování.

Zadání

Učitel potřeboval během zkoušení zabavit žáky. Rozdal jim proto osm integrálů.

1. $\int\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x$; 2. $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$; 3. $\int\left(2\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$; 4. $\int\left(\sin x+\cos x\right)\mathrm{d}x$;

5. $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x$; 6. $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x$; 7. $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$; 8. $\int\left(a^x-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

Petr a Pavel se dohodli, že budou soutěžit, který z nich vypočítá více příkladů.

Každý z nich vypočítal všechny příklady. Byly v nich však chyby. Určete, kdo z nich počítal lépe, jestliže máte k dispozici jejich výsledky:

a. Petr: 1. $\frac{x^3}{3}-2x^2+C$; 2. $-\frac{2}{x}-3\ln|x|+C$; 3. $\frac{3}{2}x\cdot\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x^3}+C$; 4. $\cos x-\sin x+C$;

5. $-\mathrm{tg}x+\mathrm{cotg}x+C$; 6. $2\cos x+C$; 7. $1+\sin x+C$; 8. $\frac{a^x}{\ln a}-\mathrm{e}^x+C$.

b. Pavel: 1. x^3-x^2+x+C; 2. $-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}+C$; 3. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+C$; 4. $\sin x-\cos x+C$;

5. $\mathrm{tg}x-\mathrm{cotg}x+C$; 6. $-2\cos x+C$; 7. $x+\sin x+C$; 8. $\frac{a^x}{\ln a}-\mathrm{e}^x+C$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Petr vypočítal dobře pouze dva příklady – druhý a osmý. Pavel vypočítal dobře šest příkladů – první, čtvrtý, pátý, šestý, sedmý a osmý.

1. $\int\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+x+C=x^3-x^2+x+C$;

2. $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^{-2}-3\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-3\cdot\ln|x|+C=-\frac{2}{x}-3\cdot\ln|x|+C$;

3. $\int\left(2\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x=2\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-3\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[4]{x^3}+C$;

4. $\int\left(\sin x+\cos x\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$;

5. $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=tgx-\cot gx+C$;

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

6. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -2\cos x + C;$

7. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int (1+\cos x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C;$

8. $\int \left(a^x - \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} - \mathrm{e}^x + C,\ a \in R^+ - \{1\}$

Doplňkové aktivity

Žáci si mohou vytvořit další možnosti, jak soutěžit, kdo vypočítá více integrálů.

Součásti popisu aktivity:

Literatura	Archiv autora