evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

INTEGRÁLNÍ SÍTO 2

Popis aktivity

Výpočet integrálů metodou per partes a substitucí

Předpokládané znalosti

Funkce, úpravy výrazů, pravidla pro integrování. Metoda per partes, substituční metoda.

Potřebné pomůcky

Pracovní list

Zadání

Po probrání integračních metod dostali žáci za úkol vypočítat 10 integrálů. Každý žák dostal tabulku, ve které byly každému integrálu přiřazeny výsledky. Úkolem bylo přiřadit jednotlivým integrálům správné výsledky.

1. $\int x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$	A. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$
2. $\int \ln x\,\mathrm{d}x =$	B. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$
3. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x =$	C. $x\cdot(\ln x - 1)+C$
4. $\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$	D. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$
5. $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x =$	E. $x\cdot \mathrm{tg}x + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
6. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$	F. $-x^2\cdot\cos x + 2\cdot x\cdot\sin x + 2\cdot\cos x + C$
7. $\int (1-x)^2\,\mathrm{d}x =$	G. $\frac{1}{3\cdot(1-x^3)}+C$
8. $\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}\,\mathrm{d}x =$	H. $-\frac{(1-x)^3}{3}+C$
9. $\int \sin x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x =$	I. $x\cdot\sin x + \cos x + C$
10. $\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x =$	J. $\mathrm{e}^x\cdot(x-1)+C$

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. $$\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = x\cdot\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x\cdot(x-1)+C$$

2. $$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\cdot\ln x - \int x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - x + C = x\cdot(\ln x - 1)+C$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je F. Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

3. $$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \\ u' = \dfrac{1}{x} & v = \ln x \end{vmatrix} = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

4. $$\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin x + \cos x + C$$

5. $$\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cdot\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x & s' = \cos x \\ t' = 1 & s = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2\cdot\cos x + 2\cdot\left(x\cdot\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\right) = -x^2\cdot\cos x + 2\cdot x\cdot\sin x + 2\cdot\cos x + C$$

6. $$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 1 & v = \mathrm{tg}x \end{vmatrix} = x\cdot\mathrm{tg}x - \int \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{tg}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{vmatrix} = x\cdot\mathrm{tg}x - \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = x\cdot\mathrm{tg}x + \ln|\cos x| + C$$

7. $$\int (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 1-x \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int t^2\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{(1-x)^3}{3} + C$$

8. $$\int \frac{x^2}{\left(1-x^3\right)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 1-x^3 \\ \mathrm{d}t = -3x^2\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{3\cdot\left(1-x^3\right)} + C$$

9. $$\int \sin x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int t^2\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cdot\cos^3 x + C$$

10. $$\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2\cdot x\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{x^2} + C$$

Správné výsledky:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J	C	B	I	F	E	H	G	D	A

Doplňkové aktivity

Učitel může vytvořit celou řadu příkladů, na kterých si žáci mohou procvičit, jak umí integrovat za použití metody per partes nebo substituce.

Součásti popisu aktivity:

Literatura	Archiv autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je F. Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.