KDO LÉPE DERIVUJE 2

Popis aktivity

Základní pravidla pro derivování, derivace složené funkce.

Předpokládané znalosti

Vzorce pro úpravu výrazů, základní vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Derivace složené funkce.

Potřebné pomůcky

Pracovní list, matematické tabulky a vzorce.

Zadání

Učitel matematiky připravil pro žáky 10 příkladů na derivaci složené funkce. Nejrychlejší byli Aleš, Mirek a Zdeněk, kteří během 25 minut vypočítali všech deset příkladů. Kdo z nich byl nejlepší?

1. $y=\left(x^3-2\right)^2$; 2. $y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x-1\right)^2}$; 3. $y=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$; 4. $y=\cos^3 x$; 5. $y=\cos x^3$;

6. $y=\mathrm{tg}\left(x^2-1\right)$; 7. $y=\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}$; 8. $y=\ln\left(x^2-1\right)$; 9. $y=\ln\left(\cos 3x\right)$; 10. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Řešení chlapců:

	Aleš	**Mirek**	**Zdeněk**
1.	$6\cdot x^2\cdot\left(x^3-2\right)$	$6\cdot x^2\cdot\left(x^3-2\right)$	$6\cdot x^2\cdot\left(x^3-2\right)$
2.	$\dfrac{2\cdot x+5}{\sqrt{x^2+5\cdot x-1}}$	$\dfrac{3\cdot\left(2\cdot x+5\right)}{2\cdot\sqrt{x^2+5\cdot x-1}}$	$\dfrac{2\cdot\left(2\cdot x+5\right)}{3\cdot\sqrt{x^2+5\cdot x-1}}$
3.	$\dfrac{6\cdot x-2\cdot x^3}{\left(x^2+1\right)^3}$	$\dfrac{-2\cdot x^3+6\cdot x}{\left(x^2+1\right)^3}$	$\dfrac{2\cdot x\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$
4.	$-3\cdot\sin x\cdot\cos^2 x$	$3\cdot\sin x\cdot\left(\sin^2 x-1\right)$	$3\cdot\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)$
5.	$3\cdot x^2\cdot\sin x^3$	$-3\cdot x^2\cdot\sin x^3$	$3\cdot x^2\cdot\cos x^3$
6.	$\dfrac{2}{\cos^2\left(x^2-1\right)}$	$-\dfrac{2\cdot x}{\sin^2\left(x^2-1\right)}$	$\dfrac{2\cdot x}{\cos^2\left(x^2-1\right)}$
7.	$\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{\mathrm{tg}x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}$
8.	$\dfrac{2}{x^2-1}$	$\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}$	$\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}$
9.	$-\dfrac{3\cdot\sin 3x}{\cos 3x}$	$3\cdot\mathrm{tg}3x$	$-3\cdot\mathrm{tg}3x$
10.	$-\dfrac{1}{x^2-1}$	$-\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{2}{\left(x-1\right)^2}$

Možný postup řešení, metodické poznámky

Řešení příkladů:

1. $y=\left(x^3-2\right)^2 \quad \left|\begin{matrix} u=x^3-2 \\ y=u^2\end{matrix}\right| \Rightarrow y'=2\cdot\left(x^3-2\right)\cdot 3\cdot x^2=6\cdot x^2\cdot\left(x^3-2\right);$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

2. $$y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x-1\right)^2}\qquad \left|\begin{array}{r}u=x^2+5x-1\\ y=u^{\frac{2}{3}}\end{array}\right| \Rightarrow y'=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+5x-1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2\cdot x+5)=\frac{2\cdot(2\cdot x+5)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+5x-1}};$$

3. $$y=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow y'=\frac{2\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2-1\right)\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\cdot x^3+2\cdot x-4\cdot x^3+4\cdot x}{\left(x^2+1\right)^3}=$$
$$=\frac{6\cdot x-2\cdot x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2\cdot x\cdot\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3};$$

4. $$y=\cos^3 x\qquad \left|\begin{array}{c}u=\cos x\\ y=u^3\end{array}\right|\Rightarrow y'=3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\cdot\sin x\cdot\cos^2 x;$$

5. $$y=\cos x^3\qquad \left|\begin{array}{c}u=x^3\\ y=\cos u\end{array}\right|\Rightarrow y'=3\cdot x^2\cdot\left(-\sin x^3\right)=-3\cdot x^2\cdot\sin x^3;$$

6. $$y=\mathrm{tg}\left(x^2-1\right)\qquad \left|\begin{array}{c}u=x^2-1\\ y=\mathrm{tg}u\end{array}\right|\Rightarrow y'=2\cdot x\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^2-1\right)}=\frac{2\cdot x}{\cos^2\left(x^2-1\right)};$$

7. $$y=\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}\qquad \left|\begin{array}{c}u=\mathrm{tg}x\\ y=\mathrm{e}^u\end{array}\right|\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x};$$

8. $$y=\ln\left(x^2-1\right)\qquad \left|\begin{array}{c}u=x^2-1\\ y=\ln u\end{array}\right|\Rightarrow y'=2\cdot x\cdot\frac{1}{x^2-1}=\frac{2\cdot x}{x^2-1};$$

9. $$y=\ln(\cos 3x)\qquad \left|\begin{array}{c}u=3x\\ v=\cos u\\ y=\ln v\end{array}\right|\Rightarrow y'=3\cdot(-\sin 3x)\cdot\frac{1}{\cos 3x}=-3\cdot\mathrm{tg}3x;$$

10. $$y=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\qquad \left|\begin{array}{c}u=\dfrac{x+1}{x-1}\\ v=u^{\frac{1}{2}}\\ y=\ln v\end{array}\right|\Rightarrow y'=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}=$$
$$=\frac{-2}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x+1}=-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Nejlépe počítal Zděněk, který vypočítal správně 7 příkladů. Aleš a Mirek vypočítali dobře 6 příkladů.

Doplňkové aktivity

Učitel může vytvořit několik podobných sad příkladů a nechat žáky samostatně pracovat, aby si vyzkoušeli své dovednosti.

Součásti popisu aktivity:

Literatura	Archiv autora.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.