

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NEJKRATŠÍ SILNICE

Popis aktivity

Sestavení předpisu funkce, nalezení minima funkce – nejkratšího silničního spojení mezi městy

Předpokládané znalosti

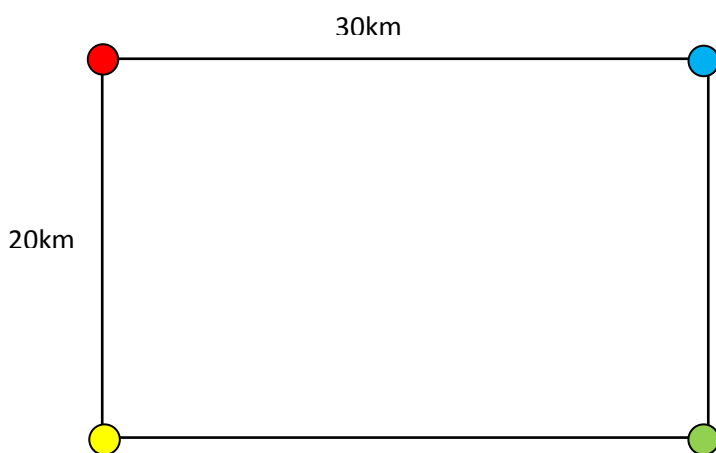
Pythagorova věta, první derivace funkce, určení extrému funkce, řešení iracionální rovnice

Potřebné pomůcky

Tužka, papír, kalkulačka

Zadání

Nádraží čtyř měst leží v rozích obdélníku o rozměrech 30 km x 20 km. Mají být spojena silnicí, která je kratší než 65 km, a přece se po ní dostaneme z libovolného nádraží do jiného.

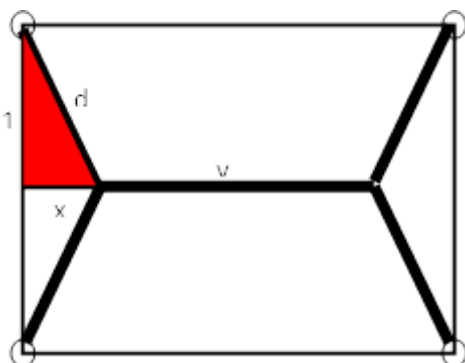


Úkoly:

1. Najděte, jak by mohla silnice probíhat.
2. Vypočítejte rozměry jednotlivých úseků silnice a její celkovou délku.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Využijeme souměrnosti obrazce (obdélníku) a navrhne tvar silnice:



Celková délka silnice:

$$y = 4d + v$$

$$v = 30 - 2x$$

$$d = \sqrt{100 + x^2}$$

$$y = 4 \cdot \sqrt{100 + x^2} + 30 - 2x$$

Extrém dostaneme v některém z bodů, kde je první derivace rovna nule.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{100+x^2}} \cdot 2x - 2 =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{100+x^2}} - 2$$

$$\frac{4x}{\sqrt{100+x^2}} - 2 = 0$$

$$4x = 2 \cdot \sqrt{100+x^2} \quad /: 2 /^2$$

$$4x^2 = 100 + x^2$$

$$3x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{100}{3}}$$

Protože záporný kořen x nemá smysl, platí:

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \doteq 5,77$$

Aby silnice byla nejkratší, musí platit, že druhá derivace bude kladná.

$$y'' = \frac{4 \cdot \sqrt{100+x^2} - 4x \cdot \frac{1}{2} \cdot (100+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{100+x^2} = \frac{400}{(100+x^2) \cdot \sqrt{100+x^2}}$$

$$y''\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) > 0$$

$$v = 30 - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{90 - 20\sqrt{3}}{3} \doteq 18,46$$

$$d = \sqrt{100 + \frac{100}{3}} = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \doteq 11,55$$

Celková délka silnice $y = (18,46 + 4 \cdot 11,55)$ km = 64,66 km

Doplňkové aktivity

Určete, jak dlouhá bude silnice v případě, že bude tvořit úhlopříčky obdélníku.

Zvolte uvnitř obdélníku libovolně bod, ze kterého se budou rozbíhat přímé silnice ke všem čtyřem nádražím, a ověřte, že celková délka bude větší než 64,66 km.

Zvolte libovolný tvar silnice skládající se z úseček a ověřte, že celková délka bude větší než 64,66 km.

Literatura

Archiv autora

Obrazový materiál

Dílo autora