# NOČNÍ ZÁVOD

**Popis aktivity**

Výpočet velikosti vektorů a jejich úhlu vzhledem k jejich umístění danému zeměpisným směrem.

**Předpokládané znalosti**

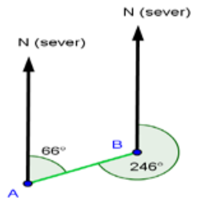
Početní a grafické operace s vektory, umístění vektoru, světové strany.

**Potřebné pomůcky**

Kalkulátor, pracovní list pro žáka

**Zadání**

***<u>Poznámka</u>*: *Azimut (z arabského „as-samt“ = směr) je orientovaný úhel, který*** *svírá určitý směr (trasa, pozorovaný objekt apod.) od severního zeměpisného směru. Je měřen ve stupních – takže např. směr severní je $0^o$ ,východní $90^o$ atd. Na zeměpisných pólech tato definice neplatí. Měření provádíme buzolou popř. kompasem.*




Na prázdninovém výletě uzavřela parta kamarádů sázku a připravila si noční orientační závod dlouhý maximálně 1 kilometr. Během dne připravil Pavel pro ostatní trasu v lese. Na konci každé etapy umístil v noci lucerničku a instrukce k dalšímu úseku. Každý závodník dostal k dispozici baterku, papír, tužku a buzolu. Úkol byl absolvovat celý orientační běh v co nejkratším čase a projít všemi třemi kontrolami.

Start i cíl byly na lesní mýtině, kde stanovali. Jednotlivé instrukce byly na kontrolách zapsány takto:

$S$ – směr severozápadozápad, 209 m;
$A$ – směr jihovýchod, 325 m;
$B$ – směr severovýchod, 249 m;
$C$ – zpět do výchozího místa.

Úkoly

1. Umístěte výchozí místo $S$ do počátku soustavy souřadnic, zakreslete celou trasu podle zeměpisného určení a zapište jednotlivé úseky jako vektory.
2. Podle tohoto umístění určete souřadnice jednotlivých stanovišť.
3. Zjistěte, jaký azimut (tj. orientovaný úhel ve stupních od severního směru) a jaká vzdálenost v metrech byly na lístku napsány v bodě $C$, aby se závodníci dostali bezpečně do cíle.
4. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $SABC$ celé uzavřené trasy nočního závodu.
5. Dodržel Pavel podmínku pro délku trasy celého závodu?
6. Vypočtěte součet směrových vektorů trasy od stratu do cíle $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}$ .

**Možný postup řešení, metodické poznámky**

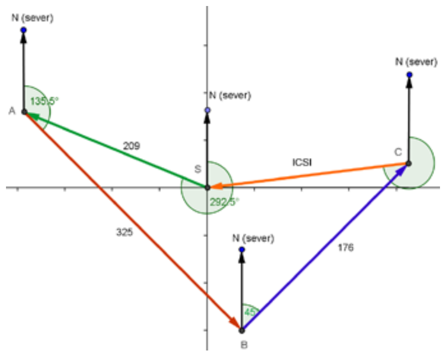
1. Pro jednotlivé úseky platí:

$$\overrightarrow{SA} \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{SA}\right| = 209$$

$$\overrightarrow{AB} \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 325$$

$$\overrightarrow{BC} \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 249$$

$$\overrightarrow{CS} \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{CS}\right| = ?$$



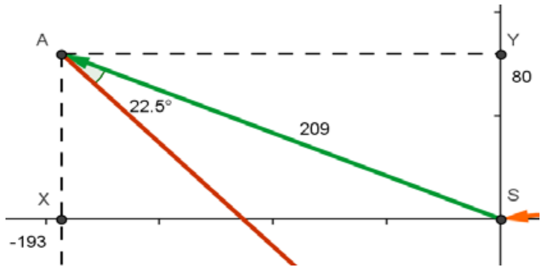

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

2. Trojúhelníky $SXA$ a $SYA$ jsou pravoúhlé. Spočtěte délku jedné a druhé odvěsny (např. pomocí goniometrické funkce) a můžete tím odvodit souřadnice bodu $A$:

$$\sin 22°30' = \frac{y_A}{209} \quad \Rightarrow \quad y_A = 80$$

$$\cos 22°30' = \frac{|x_A|}{209} \quad \Rightarrow \quad x_A = -193$$

$$\Rightarrow \quad A[-193;80]$$



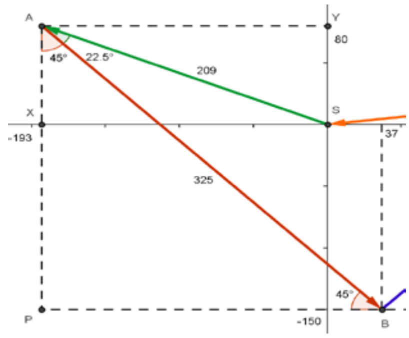

Trojúhelník $APB$ je pravoúhlý a rovnoramenný. Spočtěte délku jedné odvěsny pro určení souřadnic bodu $B$ (opět např. pomocí goniometrické funkce):

$$\sin 45° = \frac{|PB|}{325} \quad \Rightarrow \quad |PB| = |PA| = 230$$

$$\Rightarrow \quad |y_B| = 230 - 80 = 150 \quad \Rightarrow \quad y_B = -150$$

$$\Rightarrow \quad |x_A| = 230 - 193 = 37 \quad \Rightarrow \quad x_B = 37$$

$$\Rightarrow \quad B[37;-150]$$



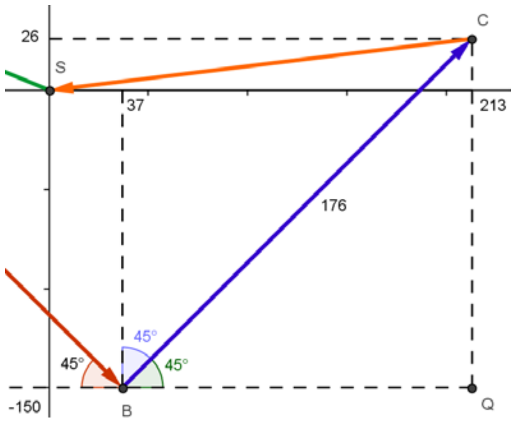

Trojúhelník $BQC$ je pravoúhlý a rovnoramenný. Spočtěte délku jedné odvěsny pro určení souřadnic bodu $C$ (opět např. pomocí goniometrické funkce):

$$\sin 45° = \frac{|QC|}{249} \quad \Rightarrow \quad |QC| = |QB| = 176$$

$$\Rightarrow \quad |y_C| = y_B + 176 = 26 \quad \Rightarrow \quad y_C = 26$$

$$\Rightarrow \quad |x_C| = x_B + 176 = 213 \quad \Rightarrow \quad x_C = 213$$

$$\Rightarrow \quad C[213;26]$$




Potom úkol 1. lze doplnit:

$$\overrightarrow{SA} = (-193;80)$$

$$\overrightarrow{AB} = (230;-230)$$

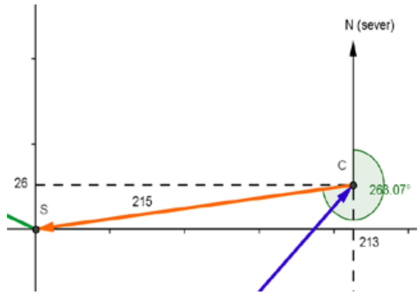
$$\overrightarrow{BC} = (176;176)$$

$$\overrightarrow{CS} = (-213;-26)$$

3. Azimut (pochodový úhel ve stupních) a vzdálenost v metrech vypočtěte např. z pravoúhlého trojúhelníku vzhledem k umístění bodu $C$ v souřadné soustavě:

$$tg\varphi' = \frac{x_C}{y_C} = \frac{213}{26} \quad \Rightarrow \quad \varphi' \doteq 83°3'$$

$$|CS| = \sqrt{x_C^{\ 2} + y_C^{\ 2}} \doteq \underline{\underline{215}}$$




*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

Pro hledaný azimut je nutné k velikosti úhlu $\varphi'$ připočítat $180°$:

$$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi' + 180° \doteq \underline{\underline{263°}}$$

Na lístku v bodě $C$ byla napsána instukce: $C\left(263°;215\,m\right)$.

4. Vnitřní úhly nekonvexního čtyřúhelníku $SABC$ spočtěte např. pomocí úhlů vektorů:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(193;-80)\cdot(230;-230)}{\left|(193;-80)\right|\cdot\left|(230;-230)\right|} \doteq 0{,}9239$$

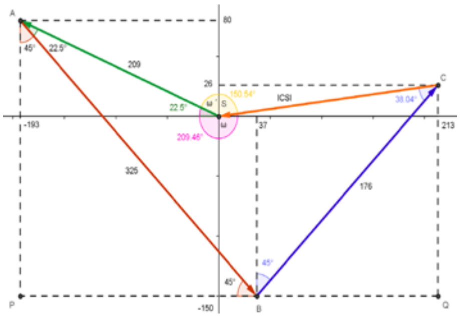
$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22°30'}}$$

(Výsledek je patrný ze zadání i vzhledem k umístění bodu $A$.)

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-230;230)\cdot(176;176)}{\left|(-230;230)\right|\cdot\left|(176;176)\right|} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 90°}}$$

(Výsledek odpovídá tomu, že trojúhelníky $APB$ a $BQC$ jsou pravoúhlé a rovnoramenné.)




$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-213;-26)\cdot(-176;-176)}{\left|(-213;-26)\right|\cdot\left|(-176;-176)\right|} \doteq 0{,}7875$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 38°3'}}$$

$$\cos\omega' = \frac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{(-193;80)\cdot(213;26)}{\left|(-193;80)\right|\cdot\left|(213;26)\right|} \doteq -0{,}8706$$

$$\Rightarrow \quad \omega' = 150°32'$$

Pro velikost úhlu $\omega$ při vrcholu $S$ platí: $\omega = 360° - \omega' = \underline{\underline{209°28'}}$

5. Výpočet obvodu čtyřúhelníku: $o = \left|\overrightarrow{SA}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CS}\right| = 209 + 325 + 249 + 215 = \underline{\underline{998}}$.

Pavel splnil předem daný úkol; délka trasy celého závodu byla 998 metrů.

6. Součet směrových vektorů je:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = (-193;80) + (230;-230) + (176;176) + (-213;-26) =$$
$$= (-193 + 230 + 176 - 213; 80 - 230 + 176 - 26) = (0;0) = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

**Doplňkové aktivity**

Žáci mohou propojit pomocí vektorů různé body trasy a vypočítat vzdálenosti mezi těmito body. Pomocí úhlu vektorů mohou vypočítat úhly spojnic různých bodů.

**Součásti popisu aktivity:**

| | |
|---|---|
| **Přesahy a vazby** | Fyzika, Zeměpis |
| **Literatura** | Archiv autora |
| **Obrazový materiál** | Dílo autora |

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*