evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

URČITÝ INTEGRÁL

Popis aktivity

Výpočet určitých integrálů.

Předpokládané znalosti

Funkce, úpravy integrálů, integrační metody.

Potřebné pomůcky

Tabulky, matematické vzorce.

Zadání

Na závěr učiva připravil učitel pro žáky tabulku s deseti určitými integrály. Každému integrálu přiřadil výsledek. Úkolem žáků je, aby k jednotlivým integrálům přiřadili správné výsledky.

1. $\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$	a. $\frac{1}{2}\cdot\ln 2$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$	b. 4
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$	c. $\sqrt{2}-1$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$	d. $\frac{1}{2}$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$	e. $\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot(\pi+8)-1$
6. $\int_1^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$	f. 1
7. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$	g. $6+\ln 2$
8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$	h. $\frac{16}{3}$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$	i. $1{,}5$

Možný postup řešení, metodické poznámky

Řešení jednotlivých integrálů:

1. $$\int_0^2 (3\cdot x^2+2\cdot x-4)\mathrm{d}x=\left[3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-4\cdot x\right]_0^2=8+4-8=4$$

2. $$\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right]_2^4=8+\ln 4-2-\ln 2=6+\ln 2$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1+1-0=2$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\cos x & t_1=1\\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x & t_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right|=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$\displaystyle=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot\ln 2$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\cos x & t_1=1\\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x & t_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right|=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=-1+\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cdot\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\sin x & t_1=0\\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}t & t_2=1\end{matrix}\right|=3\cdot\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=3\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$

7. $\displaystyle\int_1^5\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=x-1 & t_1=0\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x & t_2=4\end{matrix}\right|=\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$

8. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\ln x & t_1=0\\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x & t_2=1\end{matrix}\right|=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{matrix} t=4-x^2 & t_1=4\\ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x & t_2=1\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\cdot\int_4^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\cdot\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4=2-1=1$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=x & v'=\cos x\\ u'=1 & v=\sin x\end{matrix}\right|=\left[x\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[x\cdot\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot(\pi+8)-1$

Správné řešení tedy je: 1 – c, 2 – h, 3 – a, 4 – b, 5 – d, 6 – j, 7 – i, 8 e, 9 – g, 10 – f.

Doplňkové aktivity	
Učitel může vytvořit celou řadu příkladů, na kterých si žáci mohou procvičit, jak umí integrovat.	
Literatura	Archiv autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.