INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

URČITÝ INTEGRÁ- ŘEŠENÍ

Řešení jednotlivých integrálů:

1. $\int_0^2 \left(3\cdot x^2+2\cdot x-4\right)\mathrm{d}x=\left[3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-4\cdot x\right]_0^2=8+4-8=4$

2. $\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right]_2^4=8+\ln 4-2-\ln 2=6+\ln 2$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1+1-0=2$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\cos x & t_1=1 \\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x & t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right|=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot\ln 2$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\cos x & t_1=1 \\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x & t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right|=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=-1+\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cdot\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\sin x & t_1=0 \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}t & t_2=1\end{matrix}\right|=3\cdot\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=3\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$

7. $\int_1^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=x-1 & t_1=0 \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x & t_2=4\end{matrix}\right|=\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$

8. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} t=\ln x & t_1=0 \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x & t_2=1\end{matrix}\right|=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

9. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{matrix} t=4-x^2 & t_1=4 \\ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x & t_2=1\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\cdot\int_4^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\cdot\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4=2-1=1$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x\end{matrix}\right|=\left[x\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[x\cdot\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot(\pi+8)-1$

Správné řešení tedy je: 1 – c, 2 – h, 3 – a, 4 – b, 5 – d, 6 – j, 7 – i, 8 e, 9 – g, 10 – f.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je František Procházka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.