

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### HRÁTKY S LOGARITMY

#### Popis aktivity

Procvičení pravidel pro počítání s logaritmy při ověřování zajímavých rovností.

#### Předpokládané znalosti

Definice logaritmu  $x$  při základu  $z$ , pravidla pro počítání s logaritmy, vztah  $\log_z r = \frac{\log_t r}{\log_t z}$   
(převedení na jiný základ)

#### Zadání

Ukažte, že platí:

$$1. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall b > 0, b \neq 1$$

$$2. \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall b > 0$$

$$3. \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1 \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall b > 0, b \neq 1, \forall c > 0, c \neq 1$$

$$4. \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{10}} x} = 55 \log_x a, \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall x > 0, x \neq 1$$

$$5. \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_{10} x} = \frac{1}{\log_{10!} x}, \quad \forall x > 0, x \neq 1$$

#### Možný postup řešení, metodické poznámky

Zopakujeme se žáky základní vlastnosti logaritmické funkce, připomeneme definiční obor a nulový bod, pravidla pro počítání s logaritmy a vzorec pro převedení logaritmu na libovolně zvolený základ. První příklad vyřešíme společně, další už mohou jednotliví žáci u tabule řešit samostatně.

$$1. \text{ Levou stranu rovnosti převedeme na logaritmus o základu } b, \text{ tedy } \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}.$$

Protože  $\log_b b = 1$ , dostáváme hned pravou stranu rovnosti.

2. Postupujeme stejně, výraz na pravé straně nám napoví, na který základ logaritmus převedeme.

$$\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\log_a \frac{1}{b}}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a \frac{1}{b}}{\log_a a^{-1}} = \frac{\log_a \frac{1}{b}}{-\log_a a} = -\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b^{-1} = -(-1) \log_a b = \log_a b$$

3. Všechny logaritmy převedeme např. na logaritmy se základem  $c$  a zkrátíme.

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} \cdot \log_c b \cdot \frac{\log_c c}{\log_c a} = \log_c c = 1$$

4. Zlomky nejprve upravíme použitím první rovnosti.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{10}} x} = \log_x a + \log_x a^2 + \log_x a^3 + \dots + \log_x a^{10} =$$
$$= \log_x a + 2 \log_x a + 3 \log_x a + \dots + 10 \log_x a = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \cdot (\log_x a).$$

V první závorce je prvních deset členů aritmetické posloupnosti s diferencí 1, jejichž součet určíme podle vzorce (nebo sečteme přirozená čísla od 1 do 10) a po dosazení dostaneme výraz na pravé straně.

5. Opět použijeme první rovnost, tedy  $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_{10} x} =$

$$= \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \dots + \log_x 10 = \log_x (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10) = \log_x 10! = \frac{1}{\log_{10!} x}$$

**Doplňkové aktivity**

Po každé ověřené rovnosti můžeme zadat konkrétní hodnoty a tím vztah procvíčit nebo obráceně – začít konkrétními příklady a pak zobecnit.