


## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### JAK TO BUDE DÁL 1

<b>Popis aktivity</b>
Určení vzorce pro $n$ -tý člen posloupnosti, která je zadána výčtem svých členů
<b>Předpokládané znalosti</b>
Pojem posloupnosti, člen posloupnosti, zadání posloupnosti, aritmetická a geometrická posloupnost, používání proměnné, vlastnosti přirozených čísel
<b>Zadání</b>
<p>Napište vzorec pro <math>n</math>-tý člen posloupnosti:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1, 6, 11, 16, 21, 26, ...</li> <li>-7, -4, -1, 2, 5, 8, ...</li> <li><math>3, \frac{1}{2}, -2, -\frac{9}{2}, -7, -\frac{19}{2}, \dots</math></li> <li><math>3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \dots</math></li> <li><math>2, -5, \frac{25}{2}, -\frac{125}{4}, \frac{625}{8}, -\frac{3125}{16}, \dots</math></li> <li><math>\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \dots</math></li> <li><math>-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \dots</math></li> <li><math>\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{32}, -\frac{3}{32}, \dots</math></li> <li>-1, 4, -9, 16, -25, 36, ...</li> <li>1, 2, 6, 24, 120, 720, ...</li> </ol> 
<b>Možný postup řešení, metodické poznámky</b>
<p>Úloha najít další číslo v dané řadě čísel se vyskytuje v nejrůznějších kvízích, hlavolamech, testech studijních předpokladů apod. Někdy je v zadání řečeno, že čísla v řadě jsou uspořádána podle určitého logického pravidla, případně že existuje zákonitost, která vyhovuje všem číslům v řadě. Ani za těchto podmínek však nemusí být řešení vždy jednoznačné.</p> <p>V této aktivitě budeme předpokládat, že se jedná o výčet několika prvních členů jisté posloupnosti, kterou je možné zadat vzorcem pro <math>n</math>-tý člen a úkolem studentů je tento vzorec nalézt. Pak už je snadné najít nejen další číslo v řadě, ale také kterýkoliv člen posloupnosti.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. V tomto případě by bylo snadné nalézt další členy posloupnosti – každý následující člen je o 5 větší, než předcházející. Máme-li tuto posloupnost určit vzorcem pro <math>n</math>-tý člen, pak si stačí uvědomit, že se jedná o aritmetickou posloupnost, tedy <math>a_n = a_1 + (n-1) \cdot d</math>. Po dosazení za <math>a_1 = 1</math> a <math>d = 5</math> dostáváme vzorec ve tvaru <math>a_n = 5n - 4, n \in N</math>.</li> <li>2. Stejně jako v předcházejícím případě pro <math>a_1 = -7</math> a <math>d = 3</math> dostaneme vzorec <math>a_n = 3n - 10, n \in N</math>.</li> <li>3. Opět se jedná o aritmetickou posloupnost, kde <math>a_1 = 3, d = -\frac{5}{2}</math>, pak</li> </ol>

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$a_n = \frac{11-5n}{2}, n \in N.$$

4. V tomto případě se o aritmetickou posloupnost nejedná – rozdíl po sobě následujících členů není na první pohled konstantní. Jedná se však o posloupnost geometrickou, protože je konstantní jejich podíl. Protože pro  $n$ -tý člen geometrické posloupnosti platí

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ dostáváme v našem případě pro } a_1 = 3 \text{ a } q = \frac{2}{3} \text{ po úpravě vzorec ve tvaru}$$

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = 2^{n-1} \cdot 3^{2-n}, n \in N. \text{ Mohli jsme však postupovat jinak – všimneme-li si čitatele}$$

a jmenovatelů zlomků od třetího členu a přepíšeme si je ve tvaru  $\frac{2^2}{3^1}, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{3^3}, \frac{2^5}{3^4}, \dots$ , pak

lze také první a druhý člen přepsat na tvar  $\frac{2^0}{3^{-1}}, \frac{2^1}{3^0}$  a vzorec pro  $n$ -tý člen můžeme napsat

přímo.

5. Jedná se o obdobný případ jako v př. 4, ke vzorci pro  $n$ -tý člen můžeme dospět dvěma způsoby. Je ještě potřeba ošetřit střídání znamének. Protože jsou záporné sudé členy posloupnosti (druhý, čtvrtý,...), vynásobíme nalezený vztah číslem  $(-1)^{n+1}$ . Dostáváme vzorec

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{5^{n-1}}{2^{n-2}}, n \in N.$$

6. Všimneme-li si toho, že v čitateli zlomků jsou lichá čísla, která začínají číslem 3 a ve jmenovateli přirozená čísla, která začínají číslem 2, můžeme napsat vzorec

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}, n \in N.$$

7. Střídání znamének ošetříme výrazem  $(-1)^n$  a pak už jen pohledem na čitatele a jmenovatele zapíšeme vzorec ve tvaru  $a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}, n \in N.$

8. Na první pohled vztah mezi jednotlivými členy posloupnosti nevidíme – rozšíříme-li však druhý, čtvrtý a šestý zlomek a zapíšeme si posloupnost znovu ve tvaru

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{16}, \frac{5}{32}, -\frac{6}{64}, \dots, \text{ pak vzorec pro } n\text{-tý člen je } a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2^n}, n \in N.$$

9. Vzorec pro  $n$ -tý člen této posloupnosti lze zapsat ve tvaru  $a_n = (-1)^n \cdot n^2, n \in N.$

10. Všimneme-li si, že jednotlivé členy posloupnosti jsou součinem po sobě následujících  $n$  přirozených čísel od  $n$  po 1, např. třetí člen  $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$  nebo pátý člen  $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , pak je  $a_n = n!, n \in N.$

### Doplňkové aktivity

Některé z daných posloupností lze také zadat rekurentně. Např. v př. 1 je  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 5, n \in N.$

### Obrazový materiál

Obrázek je dostupný pod licencí Creativ Commons, autor Mgr. Dagmar Novotná, [wiki.rvp.cz/Kabinet/0.0.0.Kliparty/Činnosti/Přemýšlet](http://wiki.rvp.cz/Kabinet/0.0.0.Kliparty/Činnosti/Přemýšlet)