evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JAK TO BUDE DÁL – ŘEŠENÍ

Úloha najít další číslo v dané řadě čísel se vyskytuje v nejrůznějších kvízech, hlavolamech, testech studijních předpokladů apod.. Někdy je v zadání řečeno, že čísla v řadě jsou uspořádána podle určitého logického pravidla, případně že existuje zákonitost, která vyhovuje všem číslům v řadě. Ani za těchto podmínek však nemusí být řešení vždy jednoznačné.

V této aktivitě budeme předpokládat, že se jedná o výčet několika prvních členů jisté posloupnosti, kterou je možné zadat vzorcem pro n-tý člen a úkolem je tento vzorec nalézt. Pak už je snadné najít nejen další číslo v řadě, ale také kterýkoliv člen posloupnosti.

1. V tomto případě by bylo snadné nalézt další členy posloupnosti – každý následující člen je o 5 větší, než předcházející. Máme-li tuto posloupnost určit vzorcem pro n-tý člen, pak stačí si uvědomit, že se jedná o aritmetickou posloupnost, tedy $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. Po dosazení za $a_1 = 1$ a $d = 5$ dostáváme vzorec ve tvaru $a_n = 5n - 4, n \in N$.
2. Stejně jako v předcházejícím případě pro $a_1 = -7$ a $d = 3$ dostaneme vzorec $a_n = 3n - 10, n \in N$.
3. Opět se jedná o aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 3$, $d = -\frac{5}{2}$, pak $a_n = \frac{11-5n}{2}, n \in N$.
4. V tomto případě se o aritmetickou posloupnost nejedná – rozdíl po sobě následujících členů není na první pohled konstantní. Jedná se však o posloupnost geometrickou, protože je konstantní jejich podíl. Protože pro n-tý člen geometrické posloupnosti platí $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, dostáváme v našem případě pro $a_1 = 3$ a $q = \frac{2}{3}$ po úpravě vzorec ve tvaru $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}} = 2^{n-1}\cdot 3^{2-n}, n \in N$. Mohli jsme však postupovat jinak – všimneme-li si čitatelů a jmenovatelů zlomků od třetího členu a přepíšeme si je ve tvaru $\frac{2^2}{3^1}, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{3^3}, \frac{2^5}{3^4}, \ldots$, pak lze také první a druhý člen přepsat na tvar $\frac{2^0}{3^{-1}}, \frac{2^1}{3^0}$ a vzorec pro n-tý člen můžeme napsat přímo.
5. Jedná se o obdobný případ jako v př. 4, ke vzorci pro n-tý člen můžeme dospět dvěma způsoby. Je ještě potřeba ošetřit střídání znamének. Protože jsou záporné sudé členy posloupnosti (druhý, čtvrtý,…), vynásobíme nalezený vztah číslem $(-1)^{n+1}$. Dostáváme vzorec $a_n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{5^{n-1}}{2^{n-2}}, n \in N$.
6. Všimneme-li si toho, že v čitateli zlomků jsou lichá čísla, která začínají číslem 3 a ve jmenovateli přirozená čísla, která začínají číslem 2, můžeme napsat vzorec $a_n = \frac{2n+1}{n+1}, n \in N$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

7. Střídání znamének ošetříme výrazem $\left(-1\right)^n$ a pak už jen pohledem na čitatele a jmenovatele zapíšeme vzorec ve tvaru $a_n = \left(-1\right)^n \dfrac{n}{2n+1}, n \in N$.
8. Na první pohled vztah mezi jednotlivými členy posloupnosti nevidíme – rozšíříme-li však druhý, čtvrtý a šestý zlomek a zapíšeme si posloupnost znovu ve tvaru $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{8}, -\dfrac{4}{16}, \dfrac{5}{32}, -\dfrac{6}{64}, \dots$, pak vzorec pro n-tý člen je $a_n = \left(-1\right)^{n+1} \cdot \dfrac{n}{2^n},\ n \in N$.
9. Vzorec pro n-tý člen této posloupnosti lze zapsat ve tvaru $a_n = \left(-1\right)^n \cdot n^2, n \in N$.
10. Všimneme-li si, že jednotlivé členy posloupnosti jsou součinem po sobě následujících n přirozených čísel od n po 1, např. třetí člen $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ nebo pátý člen $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, pak je $a_n = n!, n \in N$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.