

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# JAK FUNGUJE TŘÍSTUPŇOVÁ PŘEVODOVKA?

### Popis aktivity

Procvičení lineární funkce a grafu lineární funkce pomocí praktické situace.

### Předpokládané znalosti

Funkce, volná proměnná, vázaná proměnná, graf funkce, lineární funkce, definiční obor funkce

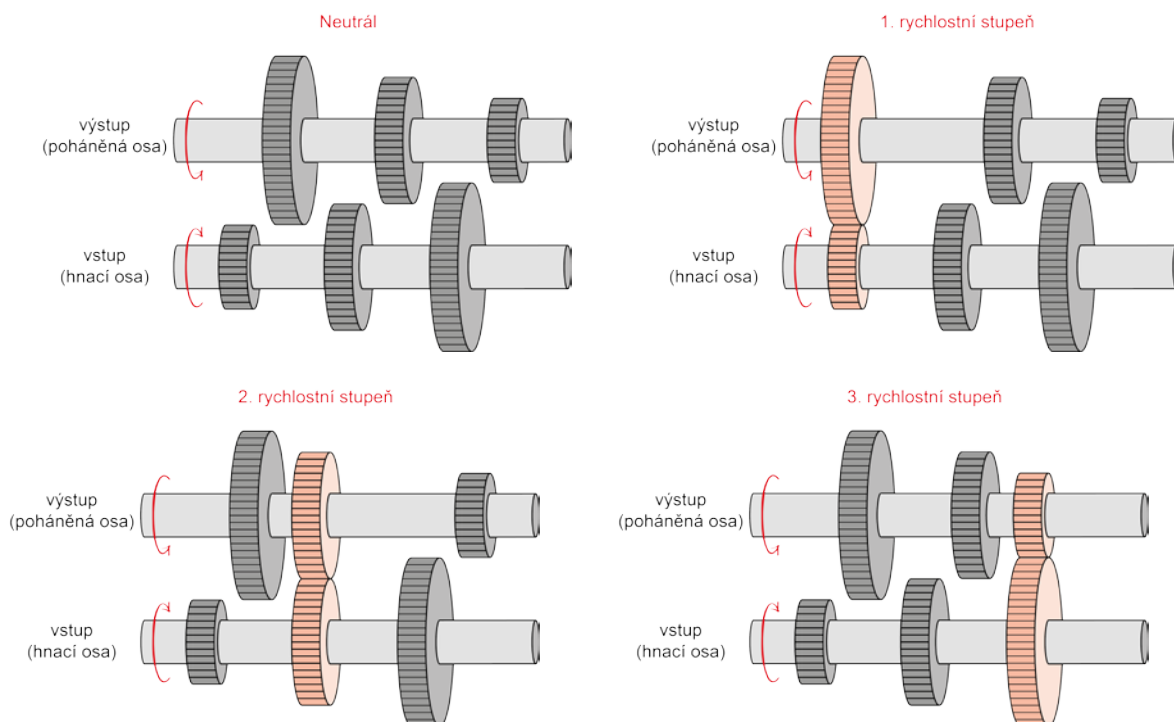
### Potřebné pomůcky

### Zadání

Každé auto má převodovku. Její účel je jasný, je tentýž jako účel přehazovačky na jízdním kole. Těžko můžeme na jedničku jet po dálnici rychlostí 130 km/h, a když to uděláme, vysokými otáčkami motor zničíme. Podobně na pětku nevyjedeme těžký kopec, díky pomalé jízdě a nízkým otáčkám motor zhasne.

Princip převodovky je jednoduchý – pomocí výměny ozubených kol nastavujeme různé převodové poměry mezi hnací osou, která vede z motoru, a poháněnou osou, která vede ke kolům auta (pochopitelně zjednodušujeme, ale pro naše potřeby to nevadí).

Když je zařazen „neutrál“, hnací a poháněná osa nejsou spojeny a motor běží naprázdno. Při zařazení rychlostních stupňů pak otáčky hnací osy přenášíme na poháněnou osu s různými poměry otáčení:



Když se hnací osa otočí jedenkrát, otočí se právě zapojené hnací kolo o jednu otáčku, tedy o počet zubů, který má na obvodu. Poháněné kolo a tedy i poháněná osa udělá jednu otáčku, pokud je počet zubů obou kol stejný, jinak se otočí více, když je připojené kolo menší, nebo méně, když je připojené kolo větší.

Podstatné při konstrukci převodovky je, aby kola měla správné rozměry – musí do sebe přesně zapadnout.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předpokládejme, že vzdálenost obou os otáčení (jsou to rovnoběžné přímky) je  $v$  a obvod (počet zubů) hnacího kola je  $o_1$ . Sestavte závislost obvodu  $o_2$  poháněného kola na hodnotě  $o_1$  a nakreslete graf. Hřídele, na kterých jsou ozubená kola uložena, mají poloměr  $d$ .

**Možný postup řešení, metodické poznámky**

Aby převodovka fungovala, musí mít poloměry ozubených kol, která do sebe zapadají, správné hodnoty – součet těchto poloměrů musí být roven vzdálenosti os otáčení.

Označme  $r_1$  poloměr hnacího kola. Pak pro poloměr poháněného kola musí platit, že  $r_1 + r_2 = v$ , tedy že  $r_2 = v - r_1$ .

Pro práci s obvody obou kol použijeme vzorec pro výpočet délky kružnice. Máme vyjádřit závislost mezi těmito obvody. V předpise závislosti mohou vystupovat pouze konstanty ( $v$  našem případě tedy hodnoty  $v$  a  $d$ ) a jako proměnné tyto obvody.

Obvod hnacího kola se rovná  $o_1 = 2\pi r_1$ , obvod poháněného kola se rovná

$$o_2 = 2\pi r_2 = 2\pi \cdot (v - r_1)$$

Musíme hodnotu  $o_2$  (vázanou proměnnou) vyjádřit pomocí hodnoty  $o_1$  (což je volná proměnná). Vyjádříme tedy  $r_1$  pomocí  $o_1$  a dosadíme:

$$o_1 = 2\pi r_1$$

$$r_1 = \frac{o_1}{2\pi}$$

Dosadíme:

$$o_2 = 2\pi \cdot (v - r_1)$$
$$o_2 = 2\pi \cdot \left( v - \frac{o_1}{2\pi} \right)$$

Jediná proměnná, která ve vztahu na pravé straně vystupuje, je  $o_1$ . Vystupuje v 1. mocnině, proto musí jít o lineární funkci. Upravme výraz tak, aby šlo o předpis lineární funkce:

$$o_2 = 2\pi \cdot \left( v - \frac{o_1}{2\pi} \right)$$

$$o_2 = 2\pi v - 2\pi \cdot \frac{o_1}{2\pi}$$

$$o_2 = -o_1 + 2\pi v$$

Když ještě pro přehlednost označíme volnou proměnnou, jak je obvyklé,  $y$ , a vázanou proměnnou  $x$ , bude mít předpis tvar:

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$y = -x + 2\pi v$$

Tento krok pochopitelně není třeba, osy grafu popíšeme původními proměnnými.

Nakreslíme graf. Graf lineární funkce je přímka, k jejímu sestavení stačí znát dva body. Dosadíme proto dvě hodnoty za  $o_1$  a vypočítáme odpovídající hodnoty  $o_2$ . Můžeme dosadit jakékoli hodnoty, zvolme „pěkné“, se kterými se bude dobře počítat:

$$1) o_1 = 0 \Rightarrow o_2 = -o_1 + 2\pi v = 0 + 2\pi v = 2\pi v. \text{ První dvojice je } [o_1, o_2] = [0, 2\pi v].$$

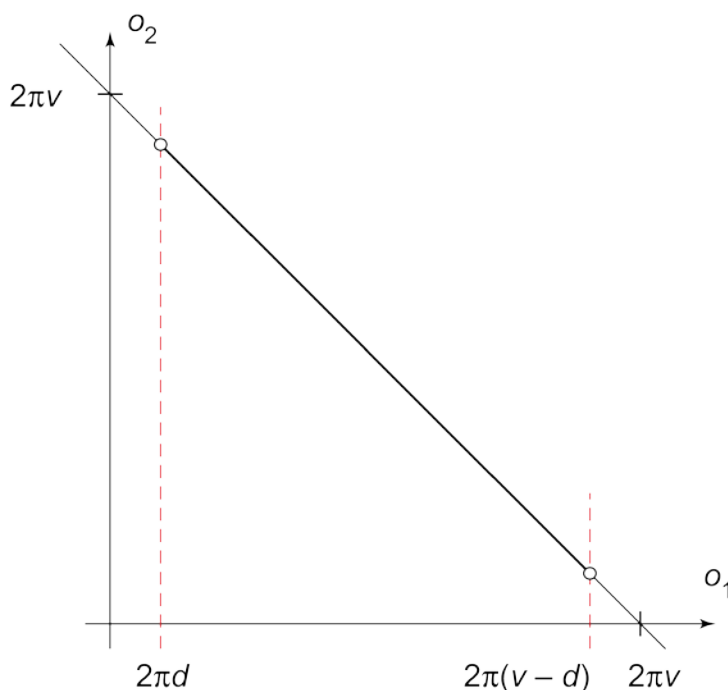
$$2) o_1 = 2\pi v \Rightarrow o_2 = -o_1 + 2\pi v = -2\pi v + 2\pi v = 0. \text{ Druhá dvojice je } [o_1, o_2] = [2\pi v, 0]$$

Pro definici každé funkce musíme ještě znát její definiční obor. V našem případě to znamená, že musíme uvážit, které hodnoty volné proměnné, tedy obvodu  $o_1$ , jsou v naší konkrétní situaci přípustné.

Hnací kolo musí mít větší poloměr než je poloměr hnací hřídele, tedy i větší obvod, než činí obvod hnací hřídele. Proto  $o_1 > 2\pi d$ .

Zároveň musí být poloměr hnacího kola menší, než hodnota  $v - d$  (vzdálenost os otáčení zmenšená o poloměr poháněné hřídele), aby se hnací kolo vůbec do mezery mezi hřídelemi vešlo. Proto  $o_1 < 2\pi \cdot (v - d)$ .

Víme, že  $0 < d < v - d < v$  (poloměr hřídele je kladný a menší než vzdálenost os otáčení zmenšená o poloměr druhé hřídele), proto  $0 < 2\pi d < 2\pi \cdot (v - d) < 2\pi v$ . Můžeme nakreslit graf:



Doporučujeme obrázky promítnout dataprojektorem.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úloha je náročná tím, že je zadaná obecně. Pro zjednodušení je možné volit konkrétní hodnoty  $v$  a  $d$ . Nabízí se diskuze o tom, zda je možné pro každou dvojici obvodů kol sestrojít také ozubená kola. Předpokládejme, že pracujeme s jednou optimální velikostí zubu.

Zde je diskuze složitější, zvláště pro případy různě velkých kol (když jeden obvod rozdělíme na zuby, druhý nemusí jít dělit) a zavádí do úlohy problematiku dělitelnosti. Tuto otázku můžeme diskutovat např. takto (není to ovšem jediná možnost):

Když máme spojena dvě kola o stejném poloměru, mají stejné obvody a tudíž i stejný počet zubů (vzdálenost os otáčení je zvolena tak, aby zuby bylo možno sestrojít). Kolo s polovičním poloměrem má i poloviční obvod, a tedy i poloviční počet zubů. Odpovídající větší kolo má 1,5 násobný poloměr a tedy i 1,5 násobný obvod a tedy i 1,5 násobný počet zubů. Zuby tedy bude možné sestrojít, pokud původní stejně velká kola měla sudý počet zubů.

Podobně můžeme uvažovat i o kolech s třetinovým poloměrem, dvoutřetinovým, ale i pětinným či sedminovým, možnost vybrousit zuby závisí na tom, jakými hodnotami byl dělitelný počet zubů stejně velkých kol.

Dále můžeme navázat otázkami, které převodové poměry vzhledem k otáčkám motoru jsou vhodné (musí být větší než nějaká mez a menší než nějaká mez), jak sestrojít příslušné grafy závislostí a jak z nich číst (podobně jako v aktivitě Jak mám přehodit?)

### Doplňkové aktivity

S aktivitou souvisejí aktivity Jak mám přehodit?, Jak rychle šlapeš?, Jaké máš na kole převody?, Jak rychle jedeš? a Jak funguje plynulé řazení?, které také využívají převodů jízdního kola a auta a zabývají se jinými základními závislostmi.

### Obrazový materiál

Dílo autora