INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

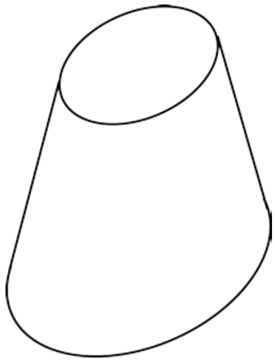
KLOBOUČNÍKU, POTŘEBUJI FEZ!

Popis aktivity
Na jednoduchém problému úloha procvičuje základní představu o komolém kuželu.
Předpokládané znalosti
Kužel, komolý kužel, podstava, plášť, síť komolého kuželu
Zadání

V příběhu Lewise Carolla o Alence (Alenka v říši divů a Alenka za zrcadlem) vystupuje jako kladná a důležitá postava Kloboučník.

Představme si, že dostal od Srdcové královny úkol: „Kloboučníku, potřebuji fez!“

Fez je jednoduchá pokrývka hlavy nakreslená na obrázku:



Fez má tvar jako rotační komolý kužel, který je dutý a má menší podstavu.

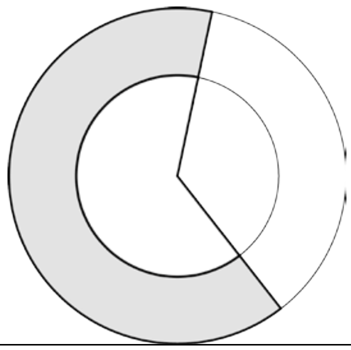
Srdcová královna ve filmovém zpracování z roku 2010 má velmi velkou hlavu, počítejme, že obvod hlavy a tedy i vnitřní obvod fezu má být 80 cm. Výška fezu se má rovnat průměru jeho menší podstavy a menší podstava má mít průměr roven dvěma třetinám průměru větší podstavy. Představme si dále, že Kloboučník fez vyrobí bez odpadu – nebude nic stříhat, všechny díly přesně vytvoří z nití.

Kolik cm^2 látky bude potřebovat, když bude fez potažen pouze z vnější strany?

Možný postup řešení, metodické poznámky

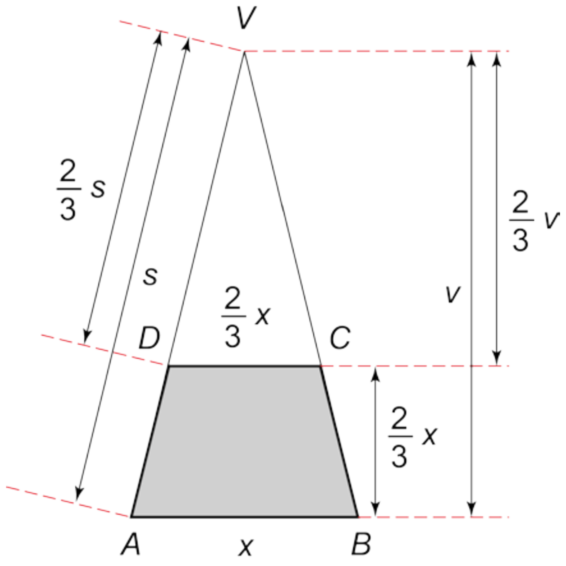
Rozviňme fez do roviny – vytvořme jeho střih.

Plášť kuželu tvoří kruhová výseč, plášť komolého kuželu tedy tvoří výseč z mezikruží. Ke konstrukci tohoto pláště potřebujeme znát poloměry obou kružnic a úhel kruhové výseče.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Pro představu nejdříve nakreslíme osový řez komolým kuželem a vyznačíme zadané údaje:



Osový řez fezu – komolého kuželu – tvoří rovnoramenný lichoběžník *ABCD*, který lze doplnit na rovnoramenný trojúhelník *ABV*.

s – strana doplněného kuželu – je zároveň poloměrem větší kružnice mezikruží a $\frac{2}{3}s$ je pak poloměrem menší kružnice mezikruží.

Úhel výseče pak určíme tak, aby oblouk – část kružnice, kterou výsečí s poloměrem *s* určíme – měl délku právě zadaných 80 cm.

Z podobnosti trojúhelníků *AVB* a *DVC* plyne, že jejich základny, výšky i ramena budou ve stejném poměru. Tento poměr máme zadán – průměr menší podstavy se má rovnat $\frac{2}{3}$ průměru větší podstavy fezu.

Když určíme hodnotu *x*, vypočítáme všechny vyznačené délky.

Vypočítejme hodnotu *x*. Máme dáno, že obvod větší podstavy fezu se rovná 80 cm. Vyjdeme ze vzorce pro výpočet délky kružnice:

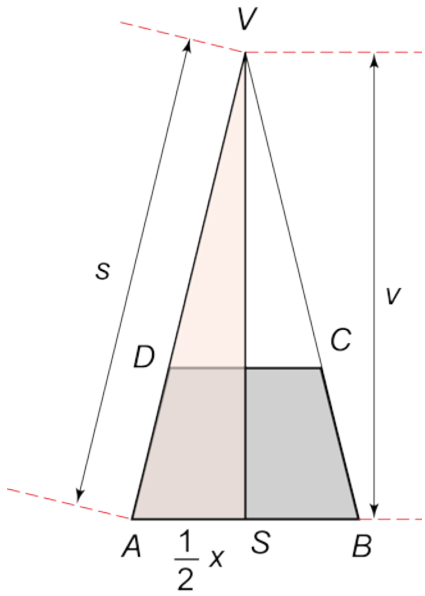
$$l = 2\pi r = \pi d\ ,$$

kde *r* je poloměr a *d* průměr. Dosaďme $l = 80\ \text{cm}$ a průměr máme označen *x*:

$$\begin{aligned} l &= \pi d \\ 80 &= \pi x \\ x &= \frac{80}{\pi} \end{aligned}$$

Dále z obrázku plyne, že $\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}v$, proto $v = 3 \cdot \frac{2}{3}x = 2x = \frac{160}{\pi}$.

Délku strany kuželu, hodnotu *s*, vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku *ASV*:



$$s^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + v^2$$

$$s^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{160}{\pi}\right)^2 = \frac{1600}{\pi^2} + \frac{25600}{\pi^2} = \frac{27200}{\pi^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{27200}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{17\cdot 16\cdot 100}}{\pi} = \frac{40\cdot\sqrt{17}}{\pi}$$

Hodnota *s* je poloměrem větší kružnice mezikruží, hodnota $\frac{2}{3}s = \frac{2}{3}\cdot\frac{40\sqrt{17}}{\pi} = \frac{80\cdot\sqrt{17}}{3\pi}$ je poloměrem menší kružnice mezikruží.

Zbývá určit, jakou část mezikruží tvoří plášť daného komolého kuželu:
Celá kružnice je určena „výsečí“, jejíž úhel je plný – o velikosti 360° neboli 2π. Protože se délka celé velké kružnice rovná $l = 2\pi s = 2\pi\cdot\frac{40\sqrt{17}}{\pi} = 80\sqrt{17}$, odpovídá úhlu o velikost 2π „oblouk“ (celá kružnice) délky $80\sqrt{17}$.
Úhlu α o neznámé velikost pak odpovídá oblouk délky 80. Vyřešíme trojčlenkou, jde o přímou úměrnost (čím větší úhel, tím větší oblouk):

$$80\sqrt{17} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2\pi$$
$$80 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Proto:

$$\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{80}{80\sqrt{17}}$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{17}}=\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$$

Úhel, který určuje výseč, má velikost $\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$, jde tedy o část plného úhlu, která je vyjádřena zlomkem

$$\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}}{2\pi}=\frac{2\pi\sqrt{17}}{17\cdot 2\pi}=\frac{\sqrt{17}}{17}\,.$$

Tímto zlomkem je vyjádřena i část mezikruží, která tvoří plášť komolého kuželu.
Obsah pláště tedy vypočítáme jako tuto část obsahu mezikruží a obsah mezikruží určíme jako rozdíl obsahů dvou kruhů – jejich poloměry jsme vypočítali výše:

$$S_{pl}=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(S_{k1}-S_{k2}\right)=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(\pi r_1^2-\pi r_2^2\right)=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left[\pi\cdot\left(\frac{40\sqrt{17}}{\pi}\right)^2-\pi\cdot\left(\frac{80\sqrt{17}}{3\pi}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left[\pi\cdot\frac{1600\cdot17}{\pi^2}-\pi\cdot\frac{6400\cdot17}{9\pi^2}\right]=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(\frac{1600\cdot17}{\pi}-\frac{6400\cdot17}{9\pi}\right)=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(\frac{9\cdot1600\cdot17-6400\cdot17}{9\pi}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(\frac{14400\cdot17-6400\cdot17}{9\pi}\right)=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\left(\frac{17\cdot(14400-6400)}{9\pi}\right)=\sqrt{17}\cdot\frac{8000}{9\pi}$$

Celý povrch fezu určíme jako součet obsahu pláště a obsahu horní podstavy. Zbývá vypočítat obsah horní podstavy. Její průměr se rovná $\frac{2}{3}x$, poloměr se tedy rovná $\frac{1}{3}x$:

$$S_p=\pi r^2=\pi\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^2=\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{80}{\pi}\right)^2=\frac{6400}{9\pi}$$

Celkem:

$$S=S_p+S_{pl}=\frac{6400}{9\pi}+\frac{\sqrt{17}\cdot8000}{9\pi}=\frac{6400+\sqrt{17}\cdot8000}{9\pi}\doteq1394$$

Potahovaný povrch fezu má tedy obsah přibližně 1394 cm^2.

Poznamenejme, že jistě bylo možné postupovat pomocí některého vzorce pro výpočet obsahu pláště komolého kuželu, např. pomocí vzorce

$$S_{pl} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2} \, ,$$

význam jednotlivých proměnných je zřejmý. Takový postup by byl možná o něco méně pracný, nebylo by ale z něj patrno, jak vlastně plášť komolého kuželu vypadá.

Doporučujeme obrázky promítnout dataprojektorem.

Doplňkové aktivity	
S aktivitou souvisejí aktivity Kloboučníku, šašek potřebuje čepici!, Kloboučníku, udělej mi cylindr! a Kloboučníku, chci mít solideo!, které řeší povrchy dalších rotačních těles, a aktivity Kloboučníku, udělej čepici pro kuchaře. a Kloboučníku, udělej kšiltovku pro poslíčka., které se zabývají sítěmi rotačních těles.	
Obrazový materiál	Dílo autora