KLOBOUČNÍKU, ŠAŠEK POTŘEBUJE ČEPICI!

Popis aktivity

Na jednoduchém problému úloha procvičuje základní představu o kuželu.

Předpokládané znalosti

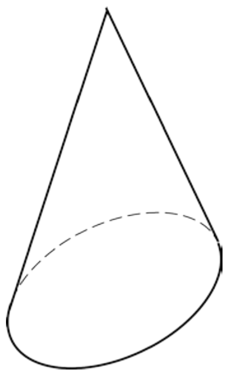
Kužel, podstava, plášť, síť kuželu

Zadání

V příběhu Lewise Carolla o Alence (Alenka v říši divů a Alenka za zrcadlem) vystupuje jako kladná a důležitá postava Kloboučník.

Představme si, že dostal od Srdcové královny úkol: „Kloboučníku, potřebuji šaškovskou čepici!“

Šaškovská čepice je jednoduchá pokrývka hlavy, která má tvar kuželu:



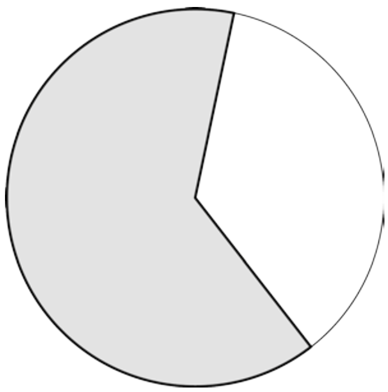
Královnin šašek má normálně velkou hlavu, předpokládejme tedy, že obvod podstavy kuželu má být 58 cm. Výška čepice se má rovnat dvojnásobku průměru jeho podstavy. Představme si dále, že Kloboučník čepici vyrobí bez odpadu – nebude nic stříhat, všechny díly přesně vytvoří z nití.

Kolik cm^2 látky bude potřebovat, když bude čepice potažena pouze z vnější strany?

Možný postup řešení, metodické poznámky

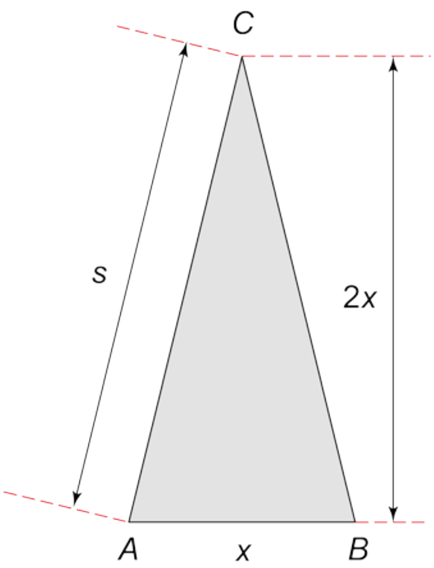
Rozviňme čepici do roviny – vytvořme její střih.

Plášť kuželu tvoří kruhová výseč. Ke konstrukci tohoto pláště potřebujeme znát poloměr kružnice a úhel kruhové výseče.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Pro představu nejdříve nakreslíme osový řez kuželem a vyznačíme zadané údaje:



Osový řez čepice – kuželu – tvoří rovnoramenný trojúhelník *ABC*.
s – strana kuželu – je zároveň poloměrem kružnice, která ohraničuje rozvinutý plášť.
Úhel výseče pak určíme tak, aby oblouk – část kružnice, kterou výsečí s poloměrem *s* určíme – měl délku právě zadaných 58 cm.

Když určíme hodnotu *x*, vypočítáme všechny vyznačené délky.

Máme dáno, že obvod čepice se rovná 58 cm. Vyjdeme ze vzorce pro výpočet délky kružnice:

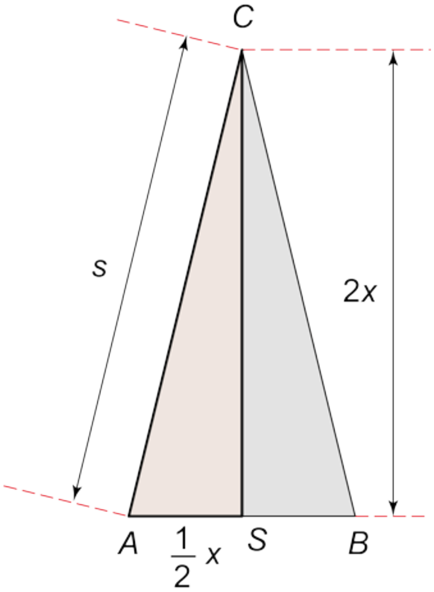
$$l = 2\pi r = \pi d\ ,$$

kde *r* je poloměr a *d* průměr. Dosaďme $l = 58\ \mathrm{cm}$ a průměr máme označen *x*:

$$\begin{aligned} l &= \pi d \\ 58 &= \pi x \\ x &= \frac{58}{\pi} \end{aligned}$$

Délku strany kuželu, hodnotu *s*, vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku *ASC*:

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



$$s^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (2x)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{17}{4}x^2$$

$$s^2 = \frac{17}{4}\cdot\left(\frac{58}{\pi}\right)^2 = \frac{17}{4}\cdot\frac{58\cdot 58}{\pi^2} = 17\cdot\frac{29\cdot 29}{\pi^2} = 17\cdot\frac{29^2}{\pi^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{17\cdot 29^2}{\pi^2}} == \frac{29\cdot\sqrt{17}}{\pi}$$

Hodnota *s* je poloměrem kružnice určující plášť kuželu.

Zbývá určit, jakou část kruhu tvoří plášť daného kuželu:
Celá kružnice je určena „výsečí“, jejíž úhel je plný – o velikosti 360° neboli 2π. Protože se délka celé kružnice rovná $l = 2\pi s = 2\pi\cdot\frac{29\sqrt{17}}{\pi} = 58\sqrt{17}$, odpovídá úhlu o velikost 2π „oblouk“ (celá kružnice) délky $58\sqrt{17}$.
Úhlu α o neznámé velikosti pak odpovídá oblouk délky 58. Vyřešíme trojčlenkou, jde o přímou úměrnost (čím větší úhel, tím větší oblouk):

$$\begin{array}{lcl} 58\sqrt{17} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\pi \\ 58 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha \end{array}$$

Proto:

$$\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{58}{58\sqrt{17}}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{17}}=\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$$

Úhel, který určuje výseč, má velikost $\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$, jde tedy o část plného úhlu, která je vyjádřena zlomkem

$$\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}}{2\pi}=\frac{2\pi\sqrt{17}}{17\cdot 2\pi}=\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Obsah pláště tedy vypočítáme jako tuto část obsahu kruhu – jeho poloměr jsme vypočítali výše:

$$S_{pl}=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot S_k=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\pi s^2=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\pi\cdot\left(\frac{29\cdot\sqrt{17}}{\pi}\right)^2=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\pi\cdot\frac{29^2\cdot 17}{\pi^2}=\frac{\sqrt{17}\cdot 29^2}{\pi}=\frac{841\sqrt{17}}{\pi}\doteq 1104$$

Potahovaný povrch čepice má tedy obsah přibližně 1104 cm^2.

Poznamenejme, že jistě bylo možné postupovat pomocí některého vzorce pro výpočet obsahu pláště kuželu, např. pomocí vzorce

$$S_{pl}=\pi rs,$$

význam jednotlivých proměnných je zřejmý. Takový postup by byl možná o něco méně pracný, nebylo by ale z něj patrno, jak vlastně plášť kuželu vypadá.

Doporučujeme obrázky promítnout dataprojektorem.

Doplňkové aktivity	
S aktivitou souvisejí aktivity Kloboučníku, potřebuji fez!, Kloboučníku, udělej mi cylindr! a Kloboučníku, chci mít solideo!, které řeší povrchy dalších rotačních těles, a aktivity Kloboučníku, udělej čepici pro kuchaře. a Kloboučníku, udělej kšiltovku pro poslíčka., které se zabývají sítěmi rotačních těles.	
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.