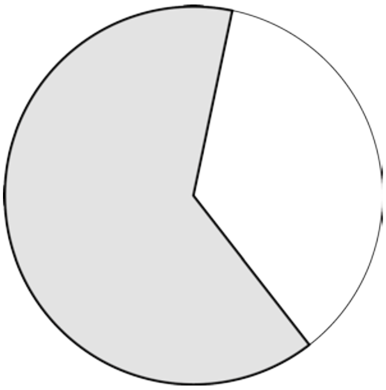
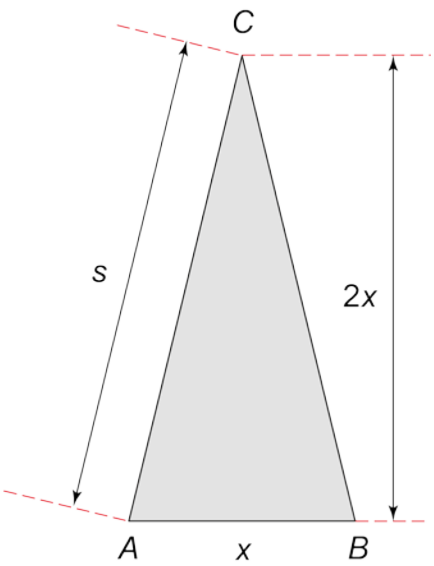
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KLOBOUČNÍKU, ŠAŠEK POTŘEBUJE ČEPICI! - ŘEŠENÍ

Rozviňme čepici do roviny – vytvořme její střih.
Plášť kuželu tvoří kruhová výseč. Ke konstrukci tohoto pláště potřebujeme znát poloměr kružnice a úhel kruhové výseče.



Pro představu nejdříve nakreslíme osový řez kuželem a vyznačíme zadané údaje:



Osový řez čepice – kuželu – tvoří rovnoramenný trojúhelník *ABC*.
s – strana kuželu – je zároveň poloměrem kružnice, která ohraničuje rozvinutý plášť.
Úhel výseče pak určíme tak, aby oblouk – část kružnice, kterou výsečí s poloměrem *s* určíme – měl délku právě zadaných 58 cm.

Když určíme hodnotu *x*, vypočítáme všechny vyznačené délky.

Máme dáno, že obvod čepice se rovná 58 cm. Vyjdeme ze vzorce pro výpočet délky kružnice:

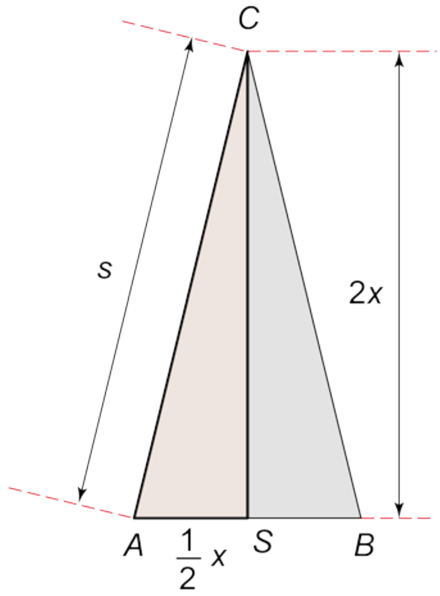
$$l = 2\pi r = \pi d\ ,$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

kde *r* je poloměr a *d* průměr. Dosaďme $l = 58\ \mathrm{cm}$ a průměr máme označen *x*:

$$\begin{aligned} l &= \pi d \\ 58 &= \pi x \\ x &= \frac{58}{\pi} \end{aligned}$$

Délku strany kuželu, hodnotu *s*, vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku *ASC*:



$$s^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + (2x)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x^2 = \frac{17}{4}x^2$$

$$s^2 = \frac{17}{4}\cdot\left(\frac{58}{\pi}\right)^2 = \frac{17}{4}\cdot\frac{58\cdot 58}{\pi^2} = 17\cdot\frac{29\cdot 29}{\pi^2} = 17\cdot\frac{29^2}{\pi^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{17\cdot 29^2}{\pi^2}} == \frac{29\cdot\sqrt{17}}{\pi}$$

Hodnota *s* je poloměrem kružnice určující plášť kuželu.

Zbývá určit, jakou část kruhu tvoří plášť daného kuželu:
Celá kružnice je určena „výsečí“, jejíž úhel je plný – o velikosti 360° neboli 2π. Protože se délka celé kružnice rovná $l = 2\pi s = 2\pi\cdot\frac{29\sqrt{17}}{\pi} = 58\sqrt{17}$, odpovídá úhlu o velikost 2π „oblouk“ (celá kružnice) délky $58\sqrt{17}$.
Úhlu α o neznámé velikosti pak odpovídá oblouk délky 58. Vyřešíme trojčlenkou, jde o přímou úměrnost (čím větší úhel, tím větší oblouk):

$$\begin{array}{lcl} 58\sqrt{17} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2\pi \\ 58 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha \end{array}$$

Proto:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{58}{58\sqrt{17}}$$
$$\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{17}} = \frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$$

Úhel, který určuje výseč, má velikost $\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}$, jde tedy o část plného úhlu, která je vyjádřena zlomkem

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{2\pi\sqrt{17}}{17}}{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{17}}{17\cdot 2\pi} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Obsah pláště tedy vypočítáme jako tuto část obsahu kruhu – jeho poloměr jsme vypočítali výše:

$$S_{pl} = \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot S_k = \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot \pi s^2 = \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\pi\cdot\left(\frac{29\cdot\sqrt{17}}{\pi}\right)^2 = \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\pi\cdot\frac{29^2\cdot 17}{\pi^2} = \frac{\sqrt{17}\cdot 29^2}{\pi} = \frac{841\sqrt{17}}{\pi} \doteq 1104$$

Potahovaný povrch čepice má tedy obsah přibližně 1104 cm^2.

Poznamenejme, že jistě bylo možné postupovat pomocí některého vzorce pro výpočet obsahu pláště kuželu, např. pomocí vzorce

$$S_{pl} = \pi r s,$$

význam jednotlivých proměnných je zřejmý. Takový postup by byl možná o něco méně pracný, nebylo by ale z něj patrno, jak vlastně plášť kuželu vypadá.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.