

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### KOLIK TROJÚHELNÍKŮ?

#### Popis aktivity

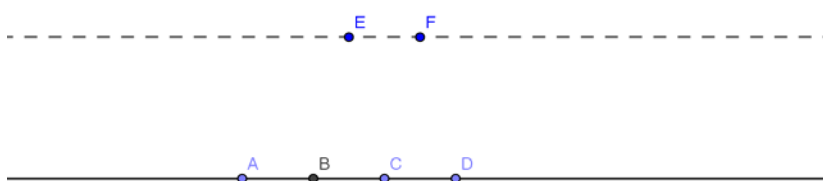
Kombinatorické úlohy a úlohy z počtu pravděpodobnosti.

#### Předpokládané znalosti

Kombinatorické pravidlo součtu a součinu, kombinační čísla, obsah trojúhelníku, definice pravděpodobnosti

#### Zadání

V rovině jsou dány body  $A, B, C, D$ , které leží na jedné přímce a mají mezi sebou stejné vzdálenosti. Dále jsou dány body  $E, F$  tak, že přímka  $EF$  je rovnoběžná s přímkou  $AD$  a vzdálenost  $EF$  je stejná jako vzdálenost  $AB$ .



- Kolik různých trojúhelníků má vrcholy v těchto bodech?
- Kolika různými čísly lze vyjádřit obsahy těchto trojúhelníků?
- Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně zvolené trojúhelníky z úlohy a) budou mít stejný obsah?

#### Možný postup řešení, metodické poznámky

V úloze nejsou třeba žádné konkrétní rozměry, ale pokud učitel usoudí, že by to žákům mohlo pomoci, je možno je zadat (např.  $|AB| = 1$ , vzdálenost bodu  $E$  od přímky  $AD$  je 2). Úlohy je třeba řešit v daném pořadí.

a) Trojúhelníky lze rozdělit např. podle toho, zda obsahují vrchol  $E$ , vrchol  $F$  nebo oba vrcholy.

Počet trojúhelníků, které obsahují vrchol  $E$ , je  $\binom{4}{2} = 6$ . Ze 4 vrcholů  $A, B, C, D$  vybereme 2, třetí vrchol je  $E$ .

Počet trojúhelníků, které obsahují vrchol  $F$ , je též.

Počet trojúhelníků, které obsahují vrcholy  $E$  i  $F$ , je 4. K těmto vrcholům přidáme už jen jeden z  $A, B, C, D$ .

Celkem je tedy  $6 + 6 + 4 = 16$  trojúhelníků.

Jiný způsob: určíme počet všech neuspořádaných trojic z daných šesti bodů:  $\binom{6}{3} = 20$ .

Některé trojice ovšem netvoří trojúhelník – jsou to ty, kde všechny 3 body leží na jedné přímce.

Takových je  $\binom{4}{3} = 4$ . Celkem tedy je  $20 - 4 = 16$  trojúhelníků.

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

b) Všechny trojúhelníky mají tutéž výšku. Je tedy třeba jen určit, kolik je různých délek základen. Pokud označíme  $|AB| = k$ , jsou možné délky základen  $k$ ,  $2k$ ,  $3k$ . Obsahy všech trojúhelníků lze tedy vyjádřit třemi čísly.

c) Počet trojúhelníků, které mají základnu  $k$ , je 10. Počet trojúhelníků, které mají základnu  $2k$ , jsou 4. Počet trojúhelníků, které mají základnu  $3k$ , jsou 2.

Vybíráme-li ze 16 možných trojúhelníků 2, máme  $\binom{16}{2} = 120$  možností.

Pravděpodobnost, že dva náhodně vybrané trojúhelníky mají týž obsah, je tedy

$$\frac{\binom{10}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{45 + 6 + 1}{120} = \frac{52}{120} = 0,43$$

**Doplňkové aktivity**

Je možno změnit úlohu tak, že přímka  $EF$  nebude rovnoběžná s přímkou  $AD$ .

**Obrazový materiál**

Dílo autora