

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KOLMÉ ÚSEČKY

Popis aktivity

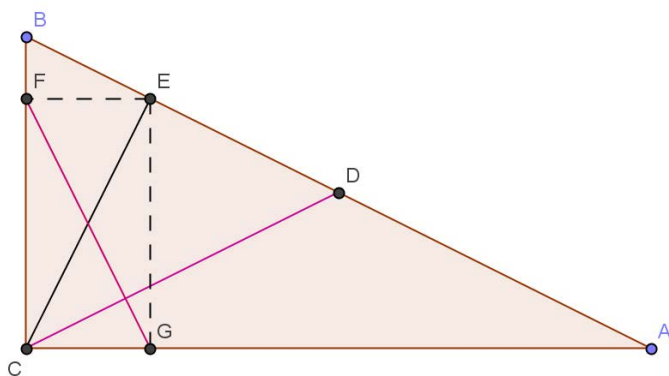
Důkaz kolmosti úseček odvozených z pravoúhlého trojúhelníku užitím skalárního součinu vektorů.

Předpokládané znalosti

Soustava souřadnic, souřadnice vektoru, součet a rozdíl vektorů, kolmost vektorů

Zadání

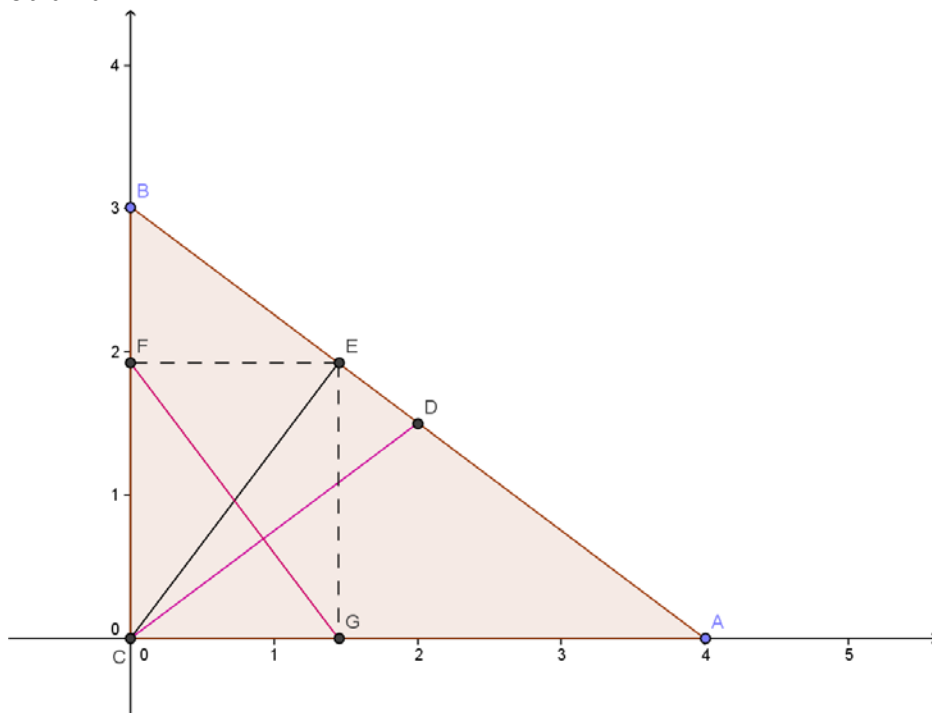
V pravoúhlém trojúhelníku ABC je D střed přepony AB , E pata výšky na přeponu, F a G kolmé průměty bodu E na odvěsny BC , AC .



Dokažte kolmost úseček CD , FG .

Možný postup řešení, metodické poznámky

Je snazší zadat úlohu s konkrétními rozměry trojúhelníku a umístěním v souřadné soustavě např. podle obrázku:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Žáci určí souřadnice bodů: $A[4;0]$, $B[0;3]$, $D[2;1,5]$.

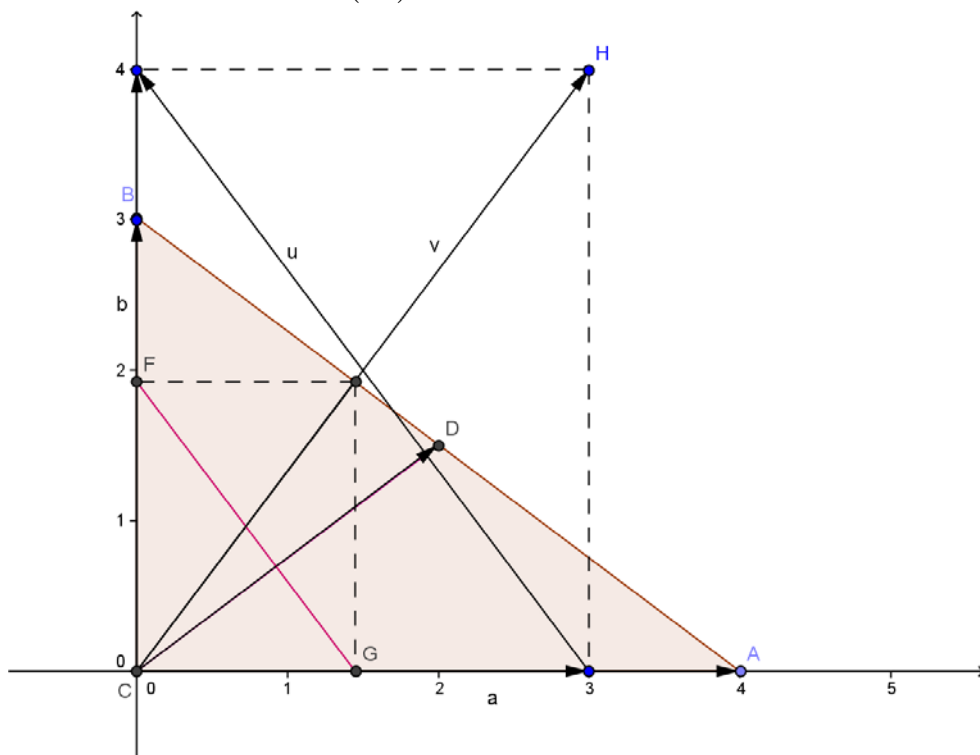
Pracujeme s vektory $\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (4;0)$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (0;3)$.

Vektor $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = (2;1,5)$, vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-4;3)$.

Vektor výšky $\vec{h} = \overrightarrow{CE}$ je kolmý na vektor \overrightarrow{AB} a je tedy násobkem vektoru $\vec{v} = (3;4)$. Na velikosti výšky nezáleží, jde jen o směr a můžeme tedy místo vektoru \vec{h} pracovat s vektorem \vec{v} .

Na vektor \vec{v} je vhodné nahlížet jako na součet vektorů $(3;0) + (0;4)$, protože rozdíl těchto vektorů je vektor \vec{u} rovnoběžný s vektorem \overrightarrow{FG} . Rozdíl vektorů $(3;0) - (0;4) = (3;-4)$.

Celá úloha se tedy redukuje pouze na zjištění kolmosti vektorů $\overrightarrow{CD} = (2;1,5)$ a $\vec{u} = (3;-4)$. Jejich skalární součin je $2 \cdot 3 + 1,5 \cdot (-4) = 0$.



Úlohu lze zobecnit (viz zadání) pro libovolný pravoúhlý trojúhelník. Pak souřadnice vyjádříme pomocí parametrů a, b :

$$A[a;0], B[0;b], D\left[\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right].$$

$$\vec{a} = (a;0), \vec{b} = (0;b), \overrightarrow{CD} = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{AB} = (-a;b)$$

$$\text{Vektor } \vec{v} = (b;a) = (b;0) + (0;a),$$

$$\text{Vektor } \vec{u} = (b;0) - (0;a) = (b;-a).$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Skalární součin vektorů \overline{CD} a \vec{u} je $\frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = 0$.

Ostatní úvahy jsou analogické.

Doplňkové aktivity

Na úlohu může navazovat např. určení souřadnic bodů D, F, G .

Obrazový materiál

Dílo autora