

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PROUŽKOVÁ KONSTRUKCE ELIPSY

Popis aktivity

Určení rovnice kuželosečky metodou analytické geometrie.

Předpokládané znalosti

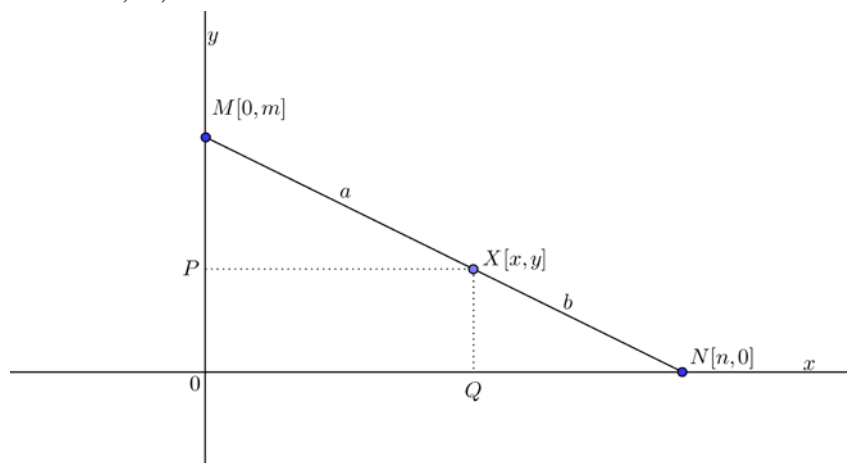
Soustava souřadnic v rovině, Pythagorova věta, podobnost trojúhelníků, řešení soustavy rovnic

Zadání

Po dvou k sobě kolmých přímkách se pohybuje svými koncovými body M, N úsečka délky $a + b$. Určete množinu všech bodů X v rovině, jestliže $|MX| : |XN| = a : b$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Zvolíme soustavu souřadnic v rovině tak, že osy x, y splývají s danými kolmými přímkami a označíme souřadnice bodů M, N, X .



Podle Pythagorovy věty platí:

$$m^2 + n^2 = (a + b)^2$$

a z podobnosti trojúhelníků PXM, QNX, ONM plyne:

$$\frac{x}{a} = \frac{n}{a+b} \Rightarrow n = \frac{x \cdot (a+b)}{a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{m}{a+b} \Rightarrow m = \frac{y \cdot (a+b)}{b}$$

Po dosazení za m, n do první rovnice dostáváme

$$\text{rovnici } \frac{y^2 \cdot (a+b)^2}{b^2} + \frac{x^2 \cdot (a+b)^2}{a^2} = (a+b)^2 \text{ a vydělíme-li obě strany rovnice výrazem } (a+b)^2,$$

dostaneme rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, což je rovnice elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloosami a, b .

Množinou všech bodů X v rovině s danou vlastností je tedy elipsa.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Doplňkové aktivity

Vyzveme žáky, aby si pomocí proužku papíru, na kterém si vyznačí úsečku MN s bodem X několik takových bodů X mezi kolmými přímkami sestrojili – jedná se o známou konstrukci elipsy z deskriptivní geometrie, která se nazývá součtová proužková konstrukce (délka celé úsečky je rovna součtu velikostí poloos). Rozdílovou proužkovou konstrukci mohou žáci vyzkoušet a dokázat sami za domácí úkol.

Obrazový materiál

Dílo autora