

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

### RYBIČKA Z PAPÍRU

#### Popis aktivity

Výpočet obsahu obrazce užitím integrálního počtu.

#### Předpokládané znalosti

Elementární funkce a jejich grafy, řešení kvadratické rovnice, vlastnosti navzájem inverzních funkcí, určení obsahu obrazce užitím integrálního počtu.

#### Potřebné pomůcky

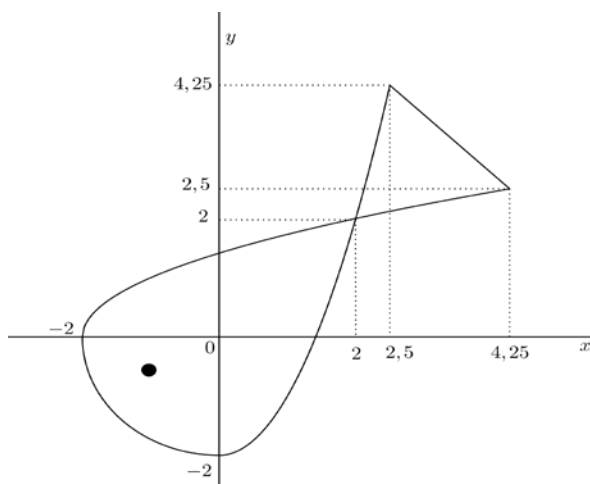
Kalkulátor

#### Zadání

Vypočítejte spotřebu papíru na výrobu „rybičky“, jejíž tělo je omezeno grafy funkcí  $f: y = \sqrt{x+2}, x \geq -2$ ,  $g: y = x^2 - 2, x \geq 0$ , obrys hlavičky je čtvrtkružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem  $r = 2$ , ocas je částí přímky o rovnici  $y = -x + 6,75$ .

#### Možný postup řešení, metodické poznámky

Načrtneme si obrázek „rybičky“ v soustavě souřadnic.



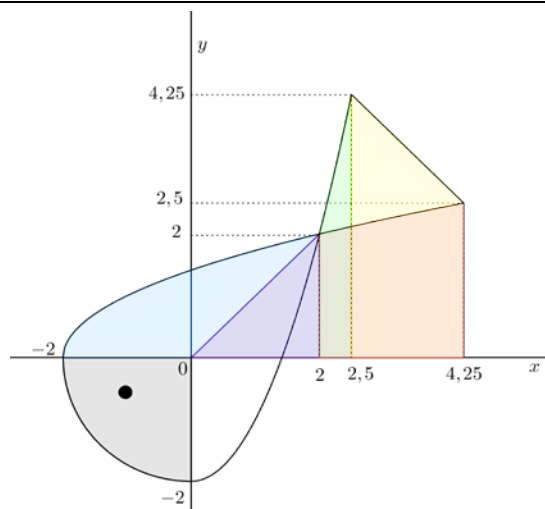
Pro výpočet obsahu rozdělíme „rybičku“ na tři části – hlavička je čtvrtkruh o poloměru  $r = 2$ , jeho obsah je  $\pi$ . Tělo se skládá ze dvou částí souměrných podle osy 1. a 3. kvadrantu (jedná se o grafy navzájem inverzních funkcí) a ocas pro potřeby výpočtu rozdělíme na dvě části.

Nejprve musíme určit souřadnice průsečíků grafů jednotlivých funkcí. Řešíme tedy rovnici

$\sqrt{x+2} = x^2 - 2$ . Můžeme řešit umocněním a převedením na rovnici čtvrtého stupně, ale vidíme i na základě sestrojených grafů, že existuje jediné řešení této rovnice a to  $x = 2$ .

Pro souřadnice okrajů ocasu stačí vyřešit jednu z rovnic  $\sqrt{x+2} = -x + 6,75$  nebo  $x^2 - 2 = -x + 6,75$ , protože opět můžeme využít vlastností inverzních funkcí. Řešíme-li druhou rovnici - tedy kvadratickou rovnici  $x^2 + x - 8,75 = 0$ , dostaneme kořeny  $x_1 = 2,5$  a  $x_2 = -3,5$ . Záporný kořen vzhledem k podmínce nevyhovuje. Okraje ocasu jsou tedy body o souřadnicích  $[2,5; 4,25]$  a  $[4,25; 2,5]$ .

## INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Tedy obsah  $S = \pi + 2 \left( \int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx - \int_0^2 x dx \right) + \int_2^{2.5} (x^2 - 2) dx + \int_{2.5}^{4.25} (-x + 6,75) dx - \int_2^{4.25} \sqrt{x+2} dx$ .

Pro výpočet  $\int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx$  využijeme jednoduché substituce (změníme meze) a dostáváme

$$S = \pi + 2 \left( \left[ \frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_0^4 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right) + \left[ \frac{x^3}{3} - 2x \right]_2^{2.5} + \left[ -\frac{x^2}{2} + 6,75x \right]_{2.5}^{4.25} - \left[ \frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_4^{6.25}$$

Po dosazení a výpočtech pomocí kalkulačky dostáváme pro obsah  $S$  přibližnou hodnotu 12,2. Na výrobu papírové rybičky budeme potřebovat asi 12,2 papíru (v odpovídajících jednotkách).

### Doplňkové aktivity

Konečný výpočet mohou žáci provést sami a navzájem se zkontrolovat. Je možné obrázek „rybičky“ rozdělit i jiným způsobem.

### Obrazový materiál

Dílo autora