

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DĚLKA TRÁMU

Popis aktivity

Jak dlouhý trám se vejde do úložného prostoru kamionu.

Předpokládané znalosti

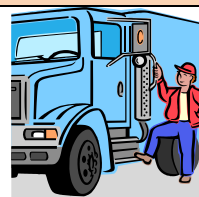
Pythagorova věta, podobnost

Potřebné pomůcky

kalkulátor

Zadání

Lukáš potřebuje v kamionu s úložným prostorem o rozměrech 2,5 m x 8 m a výšce 3 m přepravit trám o čtvercovém průřezu s hranou 0,3 m. Jak dlouhý trám může naložit, aniž by ho musel podkládat?

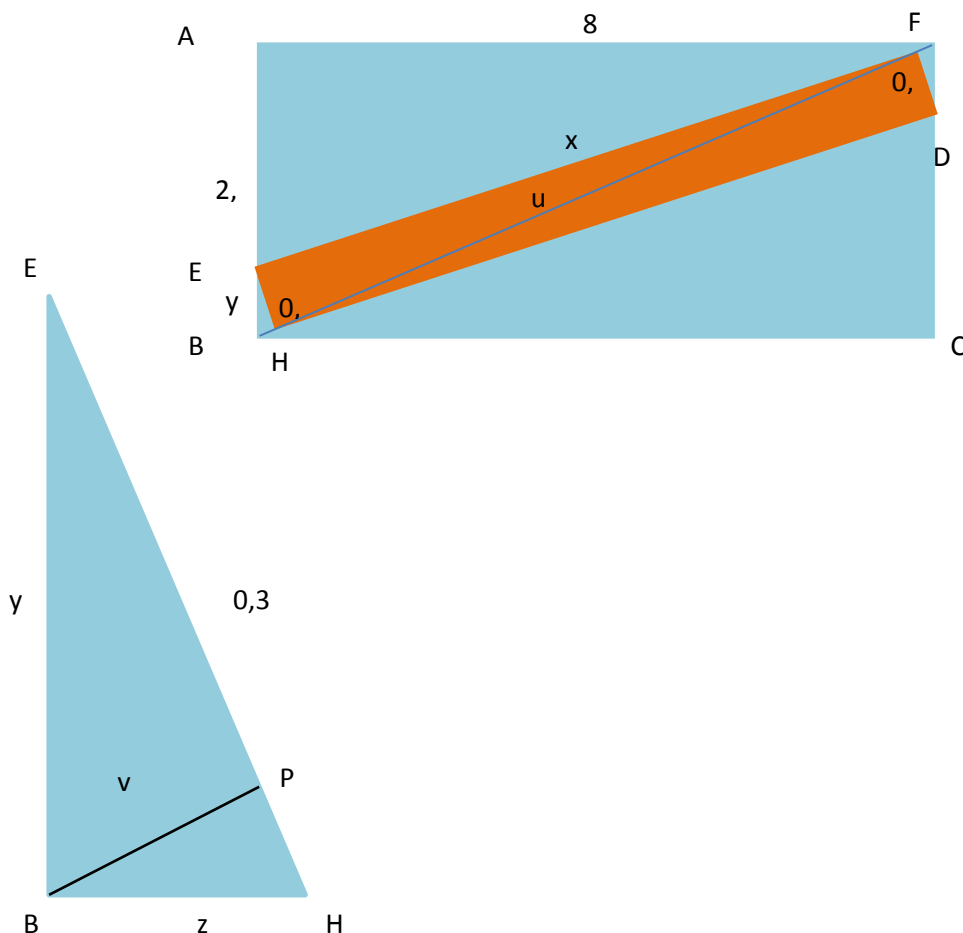


délky

Možný postup řešení, metodické poznámky

Učitel vhodně volenými otázkami pomáhá žákům najít správný postup. Žáci navrhují a diskutují postup řešení a počítají samostatně.

Řešení:



Přesné řešení:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Protože trojúhelníky FAE a EBH jsou podobné, platí:

$$\frac{2,5 - y}{x} = \frac{z}{0,3} \quad (1)$$

Pro plochu obdélníku ABCD platí:

$$2,5 \cdot 8 = 0,3 \cdot x + y \cdot z + (2,5 - y)(8 - z)$$

Po úpravě dostaneme:

$$0,3x = 8y + 2,5z \quad (2)$$

V trojúhelníku FAE platí Pythagorova věta:

$$x^2 = (8 - z)^2 + (2,5 - y)^2$$

Po dosazení za $z = \sqrt{0,3^2 - y^2}$ do rovnic (1) a (2) a dosazením x z (1) do (2) dostaneme:

$$0,3^2 \cdot (2,5 - y) = (8y + 2,5\sqrt{0,3^2 - y^2})\sqrt{0,3^2 - y^2}$$

$$0,3^2 \cdot 2,5 - 0,3^2 y = 8y\sqrt{0,3^2 - y^2} + 2,5 \cdot 0,3^2 - 2,5y^2$$

$$2,5y^2 - 0,3^2 y = 8y\sqrt{0,3^2 - y^2}$$

$$2,5y - 0,3^2 = 8\sqrt{0,3^2 - y^2}$$

$$2,5^2 y^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,3^2 y + 0,3^4 = 8^2 \cdot 0,3^2 - 8^2 y^2$$

$$(8^2 + 2,5^2) y^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,3^2 y + 0,3^4 - 8^2 \cdot 0,3^2 = 0$$

$$70,25y^2 - 0,45y - 5,7519 = 0$$

$$y_1 = 0,289385$$

$$y_2 = -0,282958$$

Tedy: $y = 0,29$

$$z = \sqrt{0,3^2 - 0,29^2} = 0,08$$

$$x^2 = (8 - 0,08)^2 + (2,5 - 0,29)^2$$

$$x = 8,22$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Délka trámu je asi 8 m a 22 cm.

Přibližná řešení:

Jestliže budeme považovat trojúhelník EBH podobný s trojúhelníkem DAB a trojúhelník EPB podobný s trojúhelníkem DAB pak platí:

$$\frac{8}{u} = \frac{y}{0,3}$$

$$\frac{v}{y} = \frac{2,5}{u}$$

Po vypočítání úhlopříčky u a dosazení dostáváme:

$$u = \sqrt{2,5^2 + 8^2}$$

$$u = 8,38$$

$$v = \frac{2,5 \cdot 8 \cdot 0,3}{8,38^2} = 0,085$$

Pro hledanou délku trámu přibližně platí:

$$x = u - 2v = 8,38 - 0,17 = 8,21$$

Druhé přibližné řešení:

Jestliže budeme považovat trojúhelníky FAE a EBH za podobné, platí:

$$\frac{8}{x} = \frac{y}{0,3}$$

$$\frac{2,5}{x} = \frac{z}{0,3}$$

V trojúhelníku FAE platí Pythagorova věta:

$$x^2 = (2,5 - y)^2 + (8 - z)^2$$

Vyjádríme neznámé y a z z obou poměrů:

$$y = \frac{8 \cdot 0,3}{x}$$

$$z = \frac{2,5 \cdot 0,3}{x}$$

Po dosazení do Pythagorovy věty dostaneme:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$x^2 = \left(2,5 - \frac{2,4}{x}\right)^2 + \left(8 - \frac{0,75}{x}\right)^2$$

Rovnice je čtvrtého řádu, proto si řešení zjednodušíme. Stačí nám výsledek odhadnout.

Víme, že x bude větší než 8 m, proto hodnota výrazu $\frac{2,4}{x}$ bude menší než 0,3 a hodnota výrazu

$\frac{0,75}{x}$ bude menší než 0,094.

Takže

$$x^2 = (2,5 - 0,3)^2 + (8 - 0,094)^2$$

$$x^2 = 67,34$$

$$x = 8,21$$

Tedy délka trámu bude větší než 8,21 m.

Nyní můžeme náš výsledek dále zpřesnit použitím vypočítané hodnoty.

$$\frac{2,4}{8,21} = 0,29$$

$$\frac{0,75}{8,21} = 0,091$$

$$x^2 = (2,5 - 0,29)^2 + (8 - 0,091)^2$$

$$x^2 = 67,44$$

$$x = 8,212$$

Trám může mít délku minimálně 8 m a 21 cm.

Výsledky úlohy jsou ovlivněny zaokrouhlováním, tedy počtem desetinných míst používaných při výpočtu.

Doplňkové aktivity

Změnit rozměry nákladového prostoru.

Zamyslet se nad těžší alternativou podložení trámu.

Obrazový materiál

Klipart poskytl Microsoft, dílo autora