

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

BLESK

Popis aktivity

Výpočet délek stran a výšek rovnostranných trojúhelníků jakožto členů nekonečné geometrické řady a výpočet součtu této řady.

Předpokládané znalosti

Nekonečná geometrická řada a existence jejího součtu.

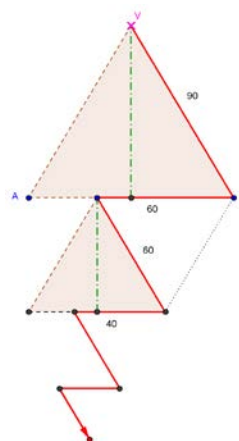
Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulačka, pracovní list pro žáka

Zadání

Blesk

Jirkovi se podařilo vyfotografovat blesk. Pohyboval se střídavě šikmo a vodorovně po stranách zmenšujících se rovnostranných trojúhelníků. Podle vzdálenosti a velikosti fotografie odhadoval délku jeho první šikmé části na 90 metrů a navazující první vodorovný úsek na 60 metrů. Druhý šikmý úsek byl tedy zase 60 metrů a druhý vodorovný 40 metrů. Směrem šikmo dolů se délka dráhy blesku postupně zkracovala a tento poměr zmenšování se zachovával, dokud blesk nezanikl podle Jirkova odhadu asi 40 metrů nad horizontem.



Úkoly

1. Vypočítejte Jirkovi délku klikaté dráhy blesku.
2. V jaké asi výšce nad horizontem se tento blesk zrodil?

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Délka dráhy blesku ve vodorovném směru je rovna dvěma třetinám předchozí délky dráhy ve směru šikmo dolů. Poměr délek těchto směrů a v tomto pořadí se zachovává.

Součtem těchto dvou úseků vytvoříte členy posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 150; 100; \frac{20}{3}; \frac{40}{9}, \dots \right\}.$$

Podle zadání tvoří délky šikmých směrů i vodorovných směrů geometrické posloupnosti, a to se stejným kvocientem $q = \frac{2}{3}$. Tvoří i jednotlivé součty geometrickou posloupnost?

Ukažme, že i tato posloupnost je geometrická.

Jsou-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrické posloupnosti se stejným kvocientem q , potom je také posloupnost $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cdot q & x_{n+1} + y_{n+1} &= x_n \cdot q + y_n \cdot q = \underline{\underline{(x_n + y_n) \cdot q}} \\ y_{n+1} &= y_n \cdot q & z_{n+1} &= (x_n + y_n) \cdot q = \underline{\underline{z_n \cdot q}} \end{aligned}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Závěr: Posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také geometrická.

Protože kvocient $q = \frac{2}{3}$ splňuje podmínku pro existenci součtu

($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 150 + 100 + \frac{20}{3} + \frac{40}{9} + \dots = \frac{150}{1 - \frac{2}{3}} = \underline{\underline{450}}$$

Dráha blesku je asi 450 metrů.

2. Vypočítejte výšky všech rovnostranných trojúhelníků a proveďte jejich součet.

Trojúhelníky jsou podobné (koeficient podobnosti $k = \frac{2}{3}$),

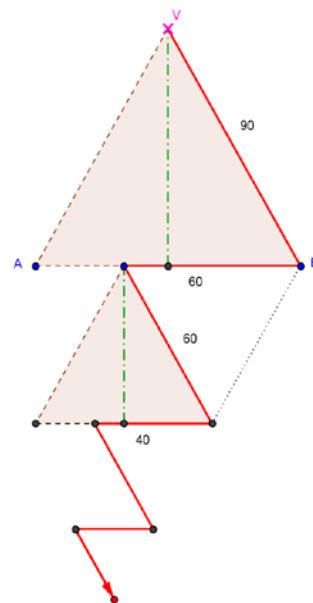
proto i poměr velikostí jejich výšek je zachován a také i existuje součet všech jejich délek.

Výpočet výšky v rovnostranném trojúhelníku:

$$v = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = a_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$s_v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \dots = \frac{45\sqrt{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 135\sqrt{3} \doteq \underline{\underline{233,83}}$$

Protože zánik blesku byl odhadován asi na 40 metrů nad zemí, předpokládá se vznik jeho záblesku asi ve výšce 273,83 metrů nad horizontem.



Doplňkové aktivity

1. Vyřešte úlohu pro stejné délky v šikmém a vodorovném směru při zachování poměru délek stran zmenšujících se trojúhelníků.
2. Žáci mohou ve skupinách vypočítat stejnou úlohu s jinou délkou strany prvního trojúhelníka popř. jinou délkou dráhy ve vodorovném směru (změna poměru).

Součásti popisu aktivity:

Literatura Archiv autora

Obrazový materiál Dílo autora