INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

BOD A HYPERBOLA 2

Popis aktivity

Určení rovnice tečny hyperboly a popisných charakteristik hyperboly.

Předpokládané znalosti

Směrový a normálový vektor, charakteristiky hyperboly, rovnice tečny kuželosečky

Potřebné pomůcky

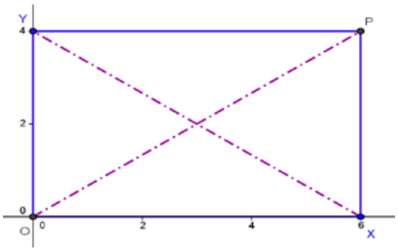
Tabulky, kalkulátor, pracovní list pro žáka

Zadání

V rovině soustavy souřadnic je dán pouze jeden bod $P\,[6\,;4]$.

1. Vypočtěte, o kolik procent je větší obvod obdélníku $OXPY$, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod P je jeho jedním vrcholem a vrchol X leží na ose o_x, než součet délek jeho úhlopříček.
2. Určete souřadnice středu, vrcholů a ohnisek hyperboly H, jejíž asymptoty leží v úhlopříčkách tohoto obdélníku a její vrchol leží ve středu strany $|OY|$.
3. Napište obecné a směrnicové tvary rovnic tečen hyperboly H, které procházejí body, v nichž hyperbola H protíná osy soustavy souřadnic.

Možný postup řešení, metodické poznámky



1. Délka úhlopříčky obdélníku $OXPY$ je $|OP| = |XY| = 2\sqrt{13}\ j$.

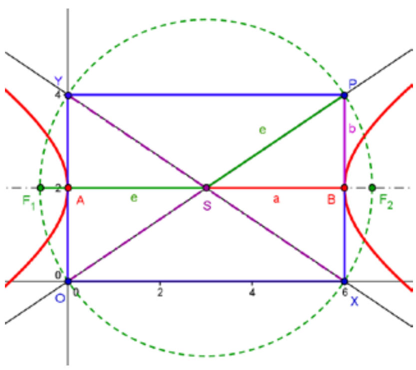
   Obvod obdélníku $OXPY$ je $o = 2\cdot(|PX| + |PY|) = 20\ j$.

   Výpočet: $p = \dfrac{2\cdot|OP|}{o}\cdot 100 = \dfrac{4\cdot\sqrt{13}}{20}\cdot 100 = \underline{\underline{34{,}64\ \%}}$.

   Obvod obdélníku $OXPY$ je asi o 63,36 % větší než součet délek jeho úhlopříček.

2. Poloosy hyperboly jsou poloviny délek stran obdélníku $OXPY$: $a = 3, b = 2$

   Výpočet excentricity: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



   Střed hyperboly je v průsečíku úhlopříček obdélníku $OXPY$:

$$S\,[3\,;2]$$

   Hlavní vrcholy hyperboly leží ve středech kratších stran:

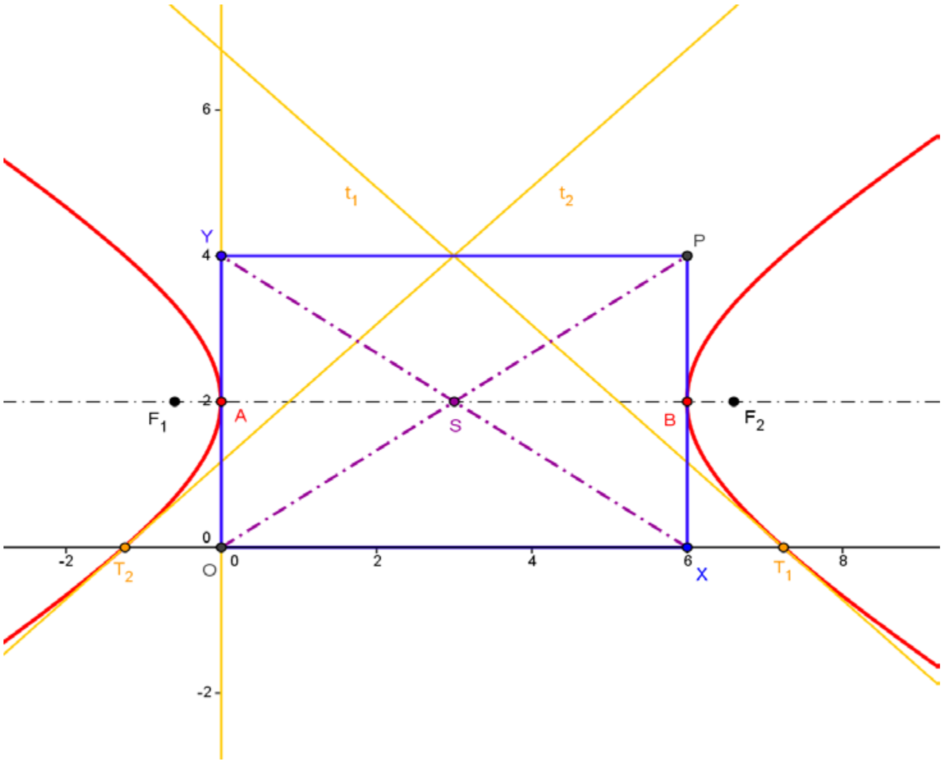
$$A\,[0\,;2],\ B\,[6\,;2]$$

   Ohniska leží na ose hyperboly souměrně k bodu S ve vzdálenostech $e = \sqrt{13}$:

$$F_1\left[3 - \sqrt{13}\,;2\right],\ F_2\left[3 + \sqrt{13}\,;2\right]$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

3. Existují tři řešení – dvě tečny procházejí průsečíkem hyperboly H s osou o_x a jedna prochází vrcholem A hyperboly H; je to přímo osa o_y.



Osová rovnice hyperboly H: $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

Obecná rovnice H: $4x^2-9y^2-24x+36y-36=0$

Průsečík hyperboly H a osy o_x: $H\cap o_x=\{T_1\,;T_2\}$, $T_1[x_1\,;0]$, $T_2\,[x_2\,;0]$

$$4x_T^{\ 2}-24x_T-36=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_T^{\ 2}-6x_T-9=0$$
$$D=72$$
$$x_{T1,2}=3\pm3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\quad T_1\left[3+3\sqrt{2}\,;0\right] \quad , \quad T_2\left[3-3\sqrt{2}\,;0\right]$$

$$T_1\in t_1 \quad\Rightarrow\quad 4(x-3)(x_{T1}-3)-9(y-2)(y_{T1}-2)=36$$
$$T_2\in t_2 \quad\Rightarrow\quad 4(x-3)(x_{T2}-3)-9(y-2)(y_{T2}-2)=36$$

Obecný tvar rovnic tečen:

$$t_1:\quad 2\sqrt{2}x+3y-6\left(2+\sqrt{2}\right)=0$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

$t_2: \quad 2\sqrt{2}x - 3y + 6\left(2 - \sqrt{2}\right) = 0$

$t_3: \quad x = 0$

Směrnicový tvar rovnic tečen:

$t_1: \quad y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}x + 2\left(2 + \sqrt{2}\right) \quad ; \quad t_2: \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x + 2\left(2 - \sqrt{2}\right)$

Doplňkové aktivity

1. Vypočti obvod a obsah útvaru, který vznikne spojením středů kratších stran obdélníku $OXPY$ a ohnisek této hyperboly. Pojmenuj tento útvar.
2. Porovnej obvody a obsahy tohoto útvaru a obdélníku $OXPY$.

Je vhodné využít obrázku popř. matematického grafického software – Cabri, Geonext, Geogebra aj. Pro výpočty využij program Mathematica, Maxima, Matlab, Maple, Derive aj.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	images.google.com, dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.