JEDEN A DVĚ 1

Popis aktivity

Určení rovnice přímky a kružnice v rovině.

Předpokládané znalosti

Směrový a normálový vektor, soustava lineární a kvadratické rovnice, charakteristiky kružnice

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulátor, pracovní list pro žáka

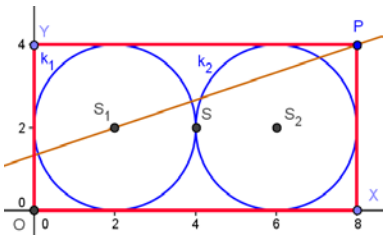
Zadání

V soustavě souřadnic je dán pouze jeden bod $P\,[8\,;4]$.

Úkoly:

1. Určete obvod obdélníku $OXPY$, jehož strany leží na osách soustavy souřadnic, bod P je jeho jedním vrcholem a bod X leží na ose x.
2. Vepište tomuto obdélníku dvě kružnice maximálního obsahu. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem P a středem kružnice, která se dotýká osy y.
3. Vypočtěte souřadnice průsečíků vepsané kružnice, která se dotýká osy y, a přímky, která prochází bodem P a středem této kružnice.
4. Napište středové a obecné rovnice kružnic, které mají střed v průsečíku úhlopříček obdélníku a procházejí jedním resp. druhým průsečíkem z úlohy č. 3.

Možný postup



1. Vrcholy obdélníku $OXPY$ mají následující souřadnice:
$O\,[0\,;0]$, $X\,[8\,;0]$, $P\,[8\,;4]$, $Y\,[0\,;4]$.
Obvod obdélníku je $24\ j$.

2. a) Parametrický tvar

směrový vektor přímky $q = \overleftrightarrow{S_1P}$ je $(6\,;2)$

$$q = \overleftrightarrow{S_1P}: \quad x = 8 + 6t$$
$$y = 4 + 2t \quad , \quad t \in R$$

b) Obecný tvar

normálový vektor přímky $\overleftrightarrow{S_1P}$ je $(2\,;-6)$: $\quad 2x - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$

c) Směrnicový tvar

směrnice přímky $\overleftrightarrow{S_1P}$ je $k = \dfrac{y_P - y_{S_1}}{x_P - x_{S_1}} = \dfrac{1}{3}$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Pozn.: V případě c) lze využít pro výpočet směrnice k složky směrového nebo normálového vektoru této přímky a vztah $k = \dfrac{s_2}{s_1} = -\dfrac{n_1}{n_2}$, nebo vyjádřit proměnnou y z obecného tvaru rovnice.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

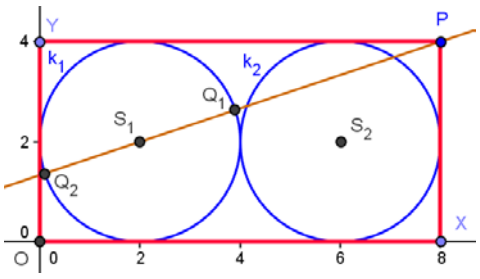
3. Jedná se o dvě kružnice se stejně velkým poloměrem

$$r_1 = r_2 = 2,\ S_1[2;2],\ S_2[6;2]$$

Souřadnice průsečíků vypočtěte řešením soustavy rovnic dosazovací metodou např. z úlohy 2. a)

Středová rovnice kružnice, která se dotýká osy y je

$$k_1:\ (x-2)^2+(y-2)^2=4$$



Parametrický tvar rovnice přímky

$$q:\quad x = 8+6t$$
$$y = 4+2t$$
$$t \in R$$

$$(8+6t-2)^2+(4+2t-2)^2=4$$
$$10t^2+20t+9=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{40}}{20}=-1\pm 0{,}1\cdot\sqrt{10}$$

$$k_1 \cap q = \{Q_1;Q_2\},\ Q_1\left[2+0{,}6\cdot\sqrt{10};2+0{,}2\cdot\sqrt{10}\right],\ Q_2\left[2-0{,}6\cdot\sqrt{10};2-0{,}2\cdot\sqrt{10}\right].$$

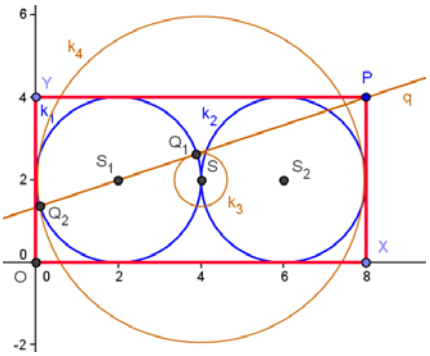
4. Průsečík úhlopříček obdélníku $OXPY$ je $S[4;2]$

Poloměr kružnice k_3 je $r_3 = |SQ_1| \doteq \sqrt{0{,}41}$

Středová rovnice kružnice k_3: $(x-4)^2+(y-2)^2=0{,}41$

Obecná rovnice kružnice

$$k_3:\quad x^2+y^2-8x-4y+19{,}59=0$$



Poloměr kružnice k_4 je $r_4 = |SQ_2| \doteq \sqrt{15{,}59}$

Středová rovnice kružnice k_4: $(x-4)^2+(y-2)^2=15{,}59$

Obecná rovnice kružnice k_4: $x^2+y^2-8x-4y+4{,}41=0$

Doplňkové aktivity

1. Napište parametrické, obecné a směrnicové tvary rovnic přímek, které procházejí středy dvou sousedních stran daného obdélníku $OXPY$.
2. Napište středovou a obecnou rovnici kružnice, která prochází body XSP.
3. Vypočtěte obsah obdélníku $OXPY$ pomocí integrálního počtu.

Je vhodné využít obrázku popř. matematického grafického software – Cabri, Geonext, Geogebra aj. Pro výpočty využit program Mathematica, Maxima, Matlab, Maple, Derive aj.

Literatura	Archiv autora
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.