

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

RACHEJTLE

Popis aktivity

Výpočet délek stran a úhlopříček čtverců jakožto členů nekonečné geometrické řady a výpočet součtu této řady.

Předpokládané znalosti

Nekonečná geometrická řada a existence jejího součtu.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulačka, pracovní list pro žáka

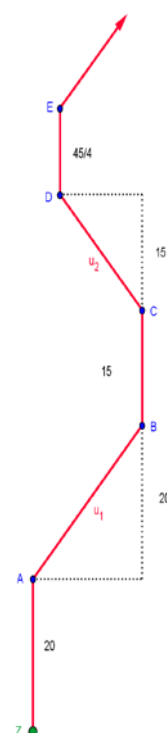
Zadání

V prodejním stánku se zábavnou pyrotechnikou nabízeli také světelné rachejtle. V přiloženém letáčku byl obrázek dráhy letící rachejtle, bezpečnostní pokyny a tyto informace o produktu:

- Rachejtle se pohybuje po dráze, kterou opakovaně tvoří dvojice svislého a šikmého úseku (obr.).
- Každý další výstup tvořený touto dvojicí je vždy o jednu čtvrtinu výšky kratší, než byl předchozí.
- Rachejtli zapíchněte do země nebo zasuňte do lahve či jinak upevněte kolmo špičkou vzhůru.
- Zapalte volně visící šňůru a urychleně odstupte minimálně 5 metrů stranou.
- Asi za pět sekund rachejtle vyletí kolmo vzhůru do výšky 20 metrů.
- Pak se zažehne svítící jiskření, rachejtle se uhne o 45° a vystoupá opět o dalších 20 metrů.
- Potom letí kolmo vzhůru 15 metrů a pak znova pod úhlem 45° šikmo o dalších 15 metrů výš.
- Tento způsob pohybu a postupného zmenšování výšky na tři čtvrtiny se stále opakuje, takže rachejtle vystoupá až do výšky 200 metrů, kde zcela vyhoří.

Úkoly

- Je informace v letáčku, že rachejtle vyletí do výšky 200 metrů, pravdivá?
- Vypočítejte skutečnou dráhu (trajektorii) letící rachejtle do chvíle, než zcela shoří.



Možný postup řešení, metodické poznámky

- Pro výpočet výšky doletu rachejtle je třeba sečíst jednotlivé úseky výstupu. Každá dvojice tvořená svislou a šikmou částí dráhy letící rachejtle představuje konkrétní hodnotu převýšení, které je postupně o jednu čtvrtinu délky menší než předchozí vzdálenost.

Proto tyto hodnoty tvoří členy geometrické posloupnosti, ve které platí: $v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n$.

Z těchto dvojic svislých úseků (stran čtverců) vytvoříte posloupnost: $\left\{ 40; 30; \frac{45}{2}; \frac{135}{8}; \dots \right\}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Protože kvocient $q = \frac{3}{4}$ splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 40 + 30 + \frac{45}{2} + \frac{135}{8} + \dots = \frac{40}{1 - \frac{3}{4}} = \underline{\underline{160}}$$

Informace v letáčku je klamná, protože rachejtle vystoupá maximálně do výšky 160 metrů.

2. Celková dráha letící rachejtle je tvořena součtem všech odpovídajících si dvojic svislých a šikmých úseků, které jsou tvořeny délkou strany čtverce a jeho úhlopříčky příslušného svislého úseku.

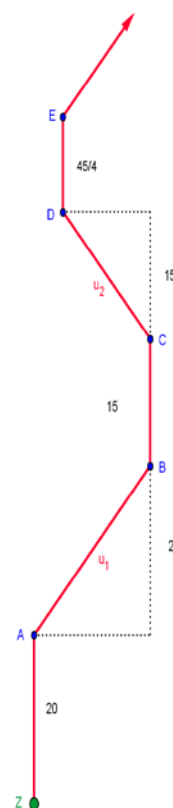
Výpočet úhlopříčky čtverce: $u = v \cdot \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = v_1 \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2}$ atd.

Z těchto dvojic svislých a šikmých úseků (stran a úhlopříček čtverců) vytvoříte posloupnost:

$$\left\{ (20 + 20\sqrt{2}); (15 + 15\sqrt{2}); \left(\frac{45}{4} + \frac{45}{4}\sqrt{2} \right); \left(\frac{135}{16} + \frac{135}{16}\sqrt{2} \right); \dots \right\}.$$

$$\begin{aligned} s_d &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 20(1 + \sqrt{2}) + 15(1 + \sqrt{2}) + \frac{45}{4}(1 + \sqrt{2}) + \frac{135}{16}(1 + \sqrt{2}) + \dots = \\ &= (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{20}{1 - \frac{3}{4}} = (1 + \sqrt{2}) \cdot 80 \doteq \underline{\underline{193,14}} \end{aligned}$$

Skutečná dráha letící rachejtle je asi 193,14 metru, takže dokonce ani celková dráha jejího letu nedosahuje parametrů, které reklamní leták uvádí.



Doplňkové aktivity

1. Vyřešte úlohu pouze pro šikmé úseky, jestliže musí být ten první z bezpečnostních důvodů kolmo vzhůru.
2. Žáci mohou ve skupinách vypočítat stejnou úlohu s jinými hodnotami výškového úhlu směru letu rachejtle.
3. Úlohu lze řešit ve skupinách změnou počáteční délky úseku i změnou kvocientu pro úseky svislé i šikmé.

Součásti popisu aktivity:

Literatura | Archiv autora

Obrazový materiál | dílo autora