

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZVLÁŠTNÍ SPIRÁLA

Popis aktivity

Výpočet obvodů čtverců jakožto členů nekonečné geometrické řady a výpočet součtu této řady.

Předpokládané znalosti

Nekonečná geometrická řada a existence jejího součtu.

Potřebné pomůcky

Tabulky, kalkulačtor, pracovní list pro žáka

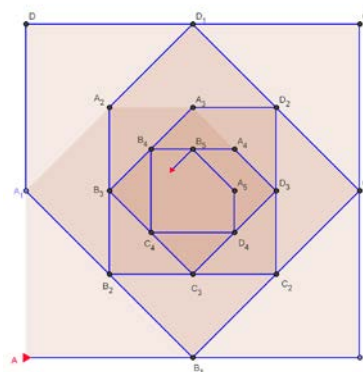
Zadání

Je dán čtverec $ABCD$ s délkou strany 8 metrů. Ve středech jeho stran leží vrcholy menšího čtverce $A_1B_1C_1D_1$, kterému je stejným způsobem vepsán další menší čtverec $A_2B_2C_2D_2$ atd.

Takto sestrojujeme další zmenšované čtverce.

Úkoly

1. Vypočítejte délku strany sedmého čtverce.
2. Vypočítejte délku úsečky složené jednotlivě z délek stran desíti narysovaných čtverců.
3. Pokud existuje součet délek stran všech sestrojených čtverců, vypočítejte ho.
4. Vypočítejte délku nekonečné spirály – lomené úsečky, která je vytvářena vždy třemi délkami strany daného čtverce a jednou polovinou této délky.



Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Spojnice středů sousedních stran daného čtverce $ABCD$ (neboli délka strany prvního vepsaného čtverce $A_1B_1C_1D_1$) je $a_1 = 4 \cdot \sqrt{2}$ metru. Délka strany druhého vepsaného čtverce $A_2B_2C_2D_2$ je $a_2 = a_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ metry, strana $a_3 = a_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ metru atd.

Je-li a_n velikost strany n -tého čtverce, potom platí: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$

Pro posloupnost délek stran těchto čtverců platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\left(a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Posloupnost délek stran vepísaných čtverců je geometrická s kvocientem $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Délka strany sedmého (šestého vepsaného) čtverce je $a_6 = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = 1$ metr.

2. Součet deseti členů geometrické posloupnosti: $S_{10} = 8 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{31}{4}(\sqrt{2} + 2)$.

Délka úsečky je asi 26,46 metru.

3. Protože kvocient $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = 8 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + \dots = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8(\sqrt{2} + 2)}{2}$$

Součet délek jednotlivých stran všech čtverců je asi 27,31 metru.

4. Jednotlivé části spirály tvoří vždy tři délky strany každého čtverce a jedna polovina této délky neboli úseky o délce $u = 3a + \frac{1}{2}a = \frac{7}{2}a$ metru. Tedy platí:

$$u_1 = 3 \cdot 8 + 4 = 28$$

$$u_2 = 3 \cdot 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$u_3 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$u_4 = 3 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \quad \text{atd.}$$

$$u_n = \frac{7}{2}a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7}{2}a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7}{2}a_{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{7}{2}a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7}{2}a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

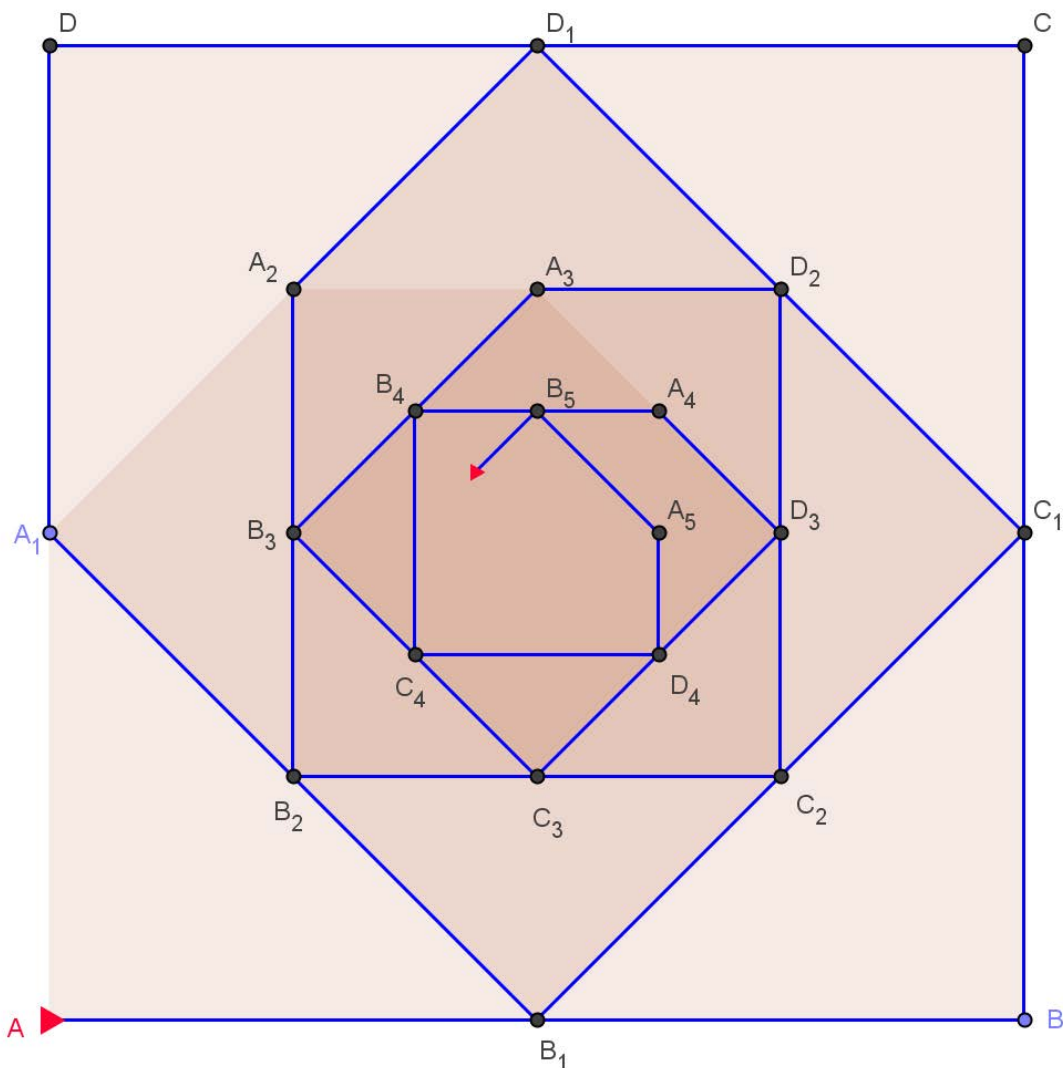
Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická. Vytvořme z jejích členů nekonečnou řadu.

Protože kvocient $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 28 + 14\sqrt{2} + 14 + 7\sqrt{2} + \dots = \frac{28}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28(\sqrt{2} + 2)}{2}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Délka spirály je asi 95,60 metru.



Doplňkové aktivity

1. Vyřešte stejnou úlohu pro celé obvody těchto čtverců.
2. Žáci mohou ve skupinách vypočítávat stejnou úlohu s jinou délkou strany prvního čtverce a porovnávat výsledky součtů nekonečných řad.

Součásti popisu aktivity:

Literatura Archiv autora

Obrazový materiál Dílo autora