evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZVLÁŠTNÍ SPIRÁLA - ŘEŠENÍ

1. Spojnice středů sousedních stran daného čtverce $ABCD$ (neboli délka strany prvního vepsaného čtverce $A_1B_1C_1D_1$) je $a_1 = 4\cdot\sqrt{2}$ metru. Délka strany druhého vepsaného čtverce $A_2B_2C_2D_2$ je $a_2 = a_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ metry, strana $a_3 = a_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ metru atd.

   Je-li a_n velikost strany n-tého čtverce, potom platí: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N;\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q$

   Pro posloupnost délek stran těchto čtverců platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{a_n} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}} \qquad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\left(a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{a_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

   Posloupnost délek stran vepisovaných čtverců je geometrická s kvocientem $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Délka strany sedmého (šestého vepsaného) čtverce je $a_6 = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = 1$ metr.

2. Součet deseti členů geometrické posloupnosti: $S_{10} = 8 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \underline{\underline{\frac{31}{4}\left(\sqrt{2}+2\right)}}$.

   Délka úsečky je asi 26,46 metru.

3. Protože kvocient $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = 8 + 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + \ldots = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{8\left(\sqrt{2}+2\right)}}$$

   Součet délek jednotlivých stran všech čtverců je asi 27,31 metru.

4. Jednotlivé části spirály tvoří vždy tři délky strany každého čtverce a jedna polovina této délky neboli úseky o délce $u = 3a + \frac{1}{2}a = \frac{7}{2}a$ metru. Tedy platí:.

   $u_1 = 3\cdot 8 + 4 = 28$

$$u_2 = 3 \cdot 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$u_3 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$u_4 = 3 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \quad \text{atd.}$$

$$u_n = \frac{7}{2} a_{n-1} \quad , \quad \forall n \in N$$

$$\forall n \in N ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{7}{2} a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7}{2} a_{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

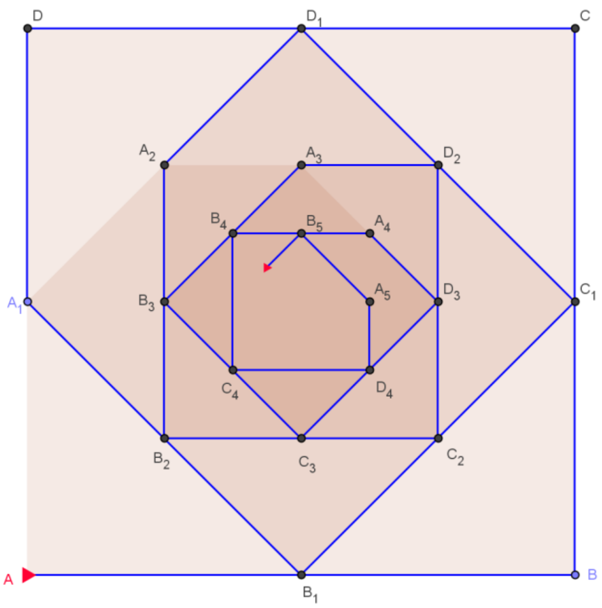
$$\forall n \in N ; \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{7}{2} a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7}{2} a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = q$$

Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická. Vytvořme z jejích členů nekonečnou řadu.

Protože kvocient $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ splňuje podmínku pro existenci součtu ($|q| < 1$), součet existuje.

$$s_u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 28 + 14\sqrt{2} + 14 + 7\sqrt{2} + \ldots = \frac{28}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{28\left(\sqrt{2} + 2\right)}}.$$

Délka spirály je asi 95,60 metru.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je J. Houser
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.