

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

CHODÍ PEŠEK OKOLO

Popis aktivity

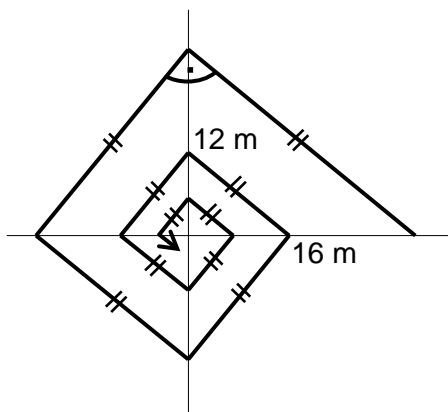
Výpočet výšky trojúhelníka a délek stran trojúhelníků, využití geometrické posloupnosti.

Předpokládané znalosti

Pythagorova věta, obsah trojúhelníka, geometrická posloupnost

Zadání

V parku se kříží dvě kolmé pěšinky. Pešek stojí na jedné z nich a od křižovatky je vzdálen 16 metrů. První stanoviště je na druhé pěšině ve vzdálenosti 12 metrů od křižovatky. Pešek má za úkol projít stanovištěm, na němž se otočí doleva o 90° a pokračuje v přímém směru k další cestě. Situace se stále opakuje. Pešek skončí, přiblíží-li se ke křižovatce do vzdálenosti 1 metru, neboť z této vzdálenosti již zasáhne svým obuškem cíl uprostřed křižovatky. Jak dlouhou trasu (s přesností na metry) musí ujít?



Možný postup řešení, metodické poznámky

Pešek se pohybuje po přeponách podobných pravouhlých trojúhelníků, které se stále zmenšují. Koeficient podobnosti je $q = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Z Pythagorovy věty plyne, že první úsek je dlouhý 20 metrů.

Pešek chodí tak dlouho, dokud se výška trojúhelníku nezkrátí alespoň na 1 metr. Výšku trojúhelníku můžeme vypočítat ze vzorce pro obsah.

V prvním pravouhlém trojúhelníku platí: $S = \frac{12 \cdot 16}{2} \text{ m}^2$, zároveň však $S = \frac{20 \cdot v_1}{2} = 10v_1$.

Porovnáním obou vztahů dostáváme $v_1 = 9,6 \text{ m}$.

Protože se jedná o podobné trojúhelníky s koeficientem podobnosti $q = \frac{3}{4}$, musí být výšky

$v_1, v_2 = \frac{3}{4}v_1, v_3 = \frac{3}{4}v_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}v_1, \dots$ těchto trojúhelníků členy geometrické posloupnosti s kvocientem

$q = \frac{3}{4}$. Podle podmínky úlohy musí pro n -tý člen této posloupnosti (tedy příslušnou výšku) platit:

$$9,6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \leq 1, \text{ tedy } (n-1) \log \frac{3}{4} \leq -\log 9,6$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$n \geq 1 - \frac{\log 9,6}{\log 0,75} \doteq 8,9$$

Pešek se tedy přiblíží v devátém úseku.

Devátý úsek zdaleka neujde celý, stačí, když dojde k průsečíku přepony a kružnice, která má poloměr 1 metr a střed na křižovatce.

Délka devátého úseku v metrech je:

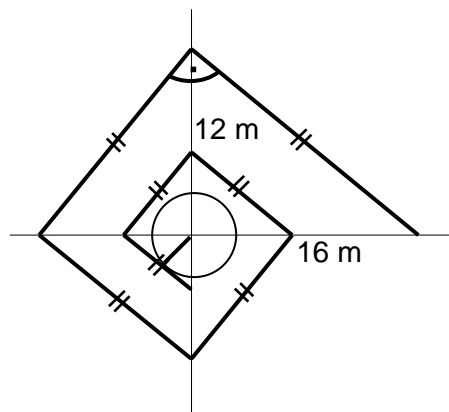
$$20 \cdot 0,75^8 \doteq 2,0$$

Pešek ujde zhruba polovinu posledního úseku. (Přesný výpočet lze provést analyticky.)

Celková délka předchozích 8 úseků v metrech je:

$$20 \cdot \frac{1-0,75^8}{1-0,75} \doteq 71,99$$

Pešek ujde trasu dlouhou asi 73 metrů.



Doplňkové aktivity

Je možné měnit hodnoty v zadání nebo se např. ptát, jak daleko bude Pešek od křižovatky, když ujde 100 m nebo zda zasáhne cíl poté, co ujde 60 m apod.

Obrazový materiál

Dílo autora