INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KDO HLEDÁ, NAJDE

Popis aktivity

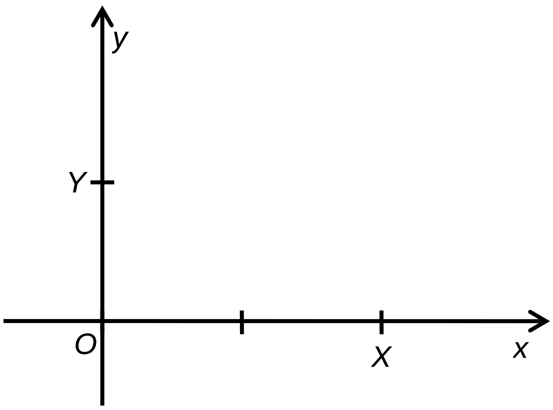
Určení množiny bodů dané vlastnosti.

Předpokládané znalosti

Obsah trojúhelníka, shodnost trojúhelníků, přímá úměrnost, analytické vyjádření přímky

Zadání

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou na osách umístěny body X a Y tak, že platí:
$|OX| = 2|OY|$



V rovině hledáme společný vrchol B trojúhelníků OXB a OYB tak, aby měly oba trojúhelníky stejný obsah.

a) Dokažte, že jedním z hledaných bodů je vrchol B obdélníku $OXBY$.

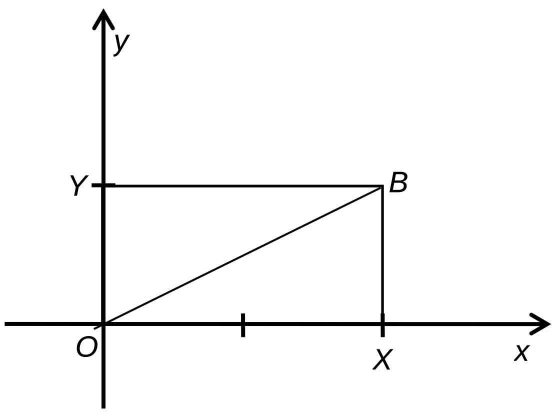
b) Najděte další dva body B_1 a B_2 s výše uvedenou vlastností.

c) Najděte všechna řešení.

d) Nalezenou množinu vyjádřete analyticky.

Možný postup řešení, metodické poznámky

V kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou na osách umístěny body X a Y tak, že platí:
$|OX| = 2|OY|$

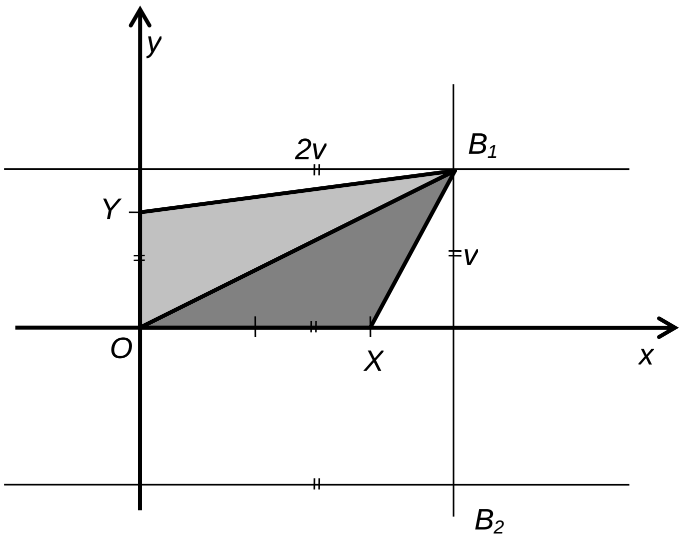


V rovině hledáme společný vrchol B trojúhelníků OXB a OYB tak, aby měly oba trojúhelníky stejný obsah.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

a) Dokažte, že jedním z hledaných bodů je vrchol B obdélníku $OXBY$.
Úhlopříčka OB půlí obdélník. Oba trojúhelníky jsou tedy shodné.

b) Najděte další dva body B_1 a B_2 s výše uvedenou vlastností.



Poměr velikostí výšek v obou hledaných trojúhelnících musí být $1:2$, tedy opačný k poměru délek příslušných podstav trojúhelníku, neboť součin délky podstavy a výšky musí být v obou trojúhelnících shodný. Velikost výšky v trojúhelníku OXB volíme libovolně, výška v druhém trojúhelníku je dvojnásobná. Vrchol B pak leží na průsečíku rovnoběžek se základnami (s osami souřadnic). Rovnoběžky jsou od základen ve vzdálenosti v, resp. $2v$.

c) Najděte všechna řešení.
Platí, že vzdálenost bodu B od osy y je dvojnásobkem vzdálenosti od osy x. Jedná se o přímou úměrnost, jejímž grafem je přímka procházející počátkem. Nevyhovuje pouze bod O (nejednalo by se o trojúhelník).
Hledanou množinou jsou tedy dvě přímky bez bodu O, které procházejí počátkem a vrcholem B obdélníku $OXBY$.

d) Nalezenou množinu vyjádřete analyticky.
Vrchol B má souřadnice $[\pm 2v; \pm v]$, tedy platí $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Doplňkové aktivity

Obdobnou úlohu je možné zobecnit, např. úsečky OX a OY nemusí být vzájemně kolmé.
Nebo:
V rovině jsou umístěny úsečky AB a CD, jejichž délky jsou v poměru $a:c$. Sestrojte množinu všech společných vrcholů X trojúhelníků ABX a CDX tak, aby měly oba trojúhelníky shodný obsah.
Řešením jsou přímky, které procházejí průsečíkem přímek, na nichž leží obě dané úsečky.

Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.