evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENIÁLNÍ SIMPSON (NIKOLIV BART)

Popis aktivity

Ověřování platnosti univerzálního Simpsonova vzorce na známých tělesech a rovinných útvarech

Předpokládané znalosti

Vzorce pro objem těles a obsah útvarů

Zadání

Pro výpočet objemů základních těles existují vzorce, které si buď pamatujeme, nebo je najdeme v tabulkách. Existuje však univerzální vzorec, pomocí kterého lze vypočítat nejen objem základních geometrických těles, ale můžeme ho dokonce použít i pro výpočet obsahu některých rovinných geometrických útvarů.

Pro objem platí: $V = \frac{v}{6}\left(S_1 + 4S_2 + S_3\right)$, kde v je výška tělesa, S_1 obsah dolní podstavy, S_2 obsah řezu tělesa rovinou rovnoběžnou s podstavou středem výšky a S_3 je obsah horní podstavy.

1. Ověřte platnost uvedeného Simpsonova vzorce pro krychli, kvádr, jehlan a kouli.
2. Ukažte, že tento vzorec můžeme použít ve tvaru $S = \frac{v}{6}\left(a_1 + 4a_2 + a_3\right)$,kde v je výška útvaru, a_1 délka jedné základny, a_2 délka střední příčky a a_3 délka druhé základny i pro výpočet obsahu trojúhelníka, rovnoběžníka a lichoběžníka.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Žáci mohou sami načrtnout příslušné těleso či obrazec a určit potřebné údaje. Pak stačí jen dosazovat a upravovat výrazy.

1. **Krychle:** V krychli o hraně a je $v = a$, $S_1 = S_2 = S_3 = a^2$, tedy

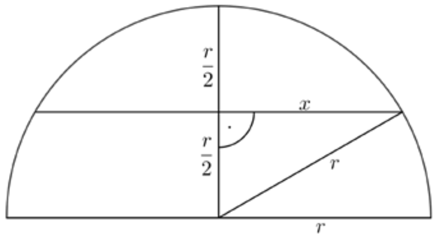
   $$V = \frac{a}{6}\left(a^2 + 4a^2 + a^2\right) = \frac{a}{6}\cdot 6a^2 = a^3$$

   Kvádr: V kvádru s hranami délek a, b, c je $v = c$ a $S_1 = S_2 = S_3 = ab$. Po dosazení do Simpsonova vzorce dostaneme $V = \frac{c}{6}\left(ab + 4ab + ab\right) = \frac{c}{6}\cdot 6ab = abc$

   Jehlan: U jehlanu platí, že mnohoúhelník podstavy a mnohoúhelník řezu jsou útvary podobné s koeficientem podobnosti $k = \frac{1}{2}$, proto $S_2 = k^2 \cdot S_1 = \frac{1}{4}\cdot S_1$ a $S_3 = 0$. Tedy podle vzorce $V = \frac{v}{6}\left(S_1 + 4\cdot\frac{1}{4}S_1 + 0_3\right) = \frac{v}{6}\cdot 2S_1 = \frac{1}{3}S_1 \cdot v$, což je známý vzorec pro objem jehlanu.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Koule: U koule můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď položíme $v = 2r, S_1 = S_3 = 0$ a $S_2 = \pi r^2$, kde r je poloměr koule a po dosazení do vzorce dostaneme hned $V = \frac{2r}{6}\left(0 + 4\pi r^2 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$ nebo můžeme počítat dvojnásobek objemu polokoule, kde $v = r, S_1 = \pi r^2$, $S_3 = 0$ a $S_2 = \pi x^2$, kde $x^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}r^2$ (viz obr.).



Pak $V = 2 \cdot \frac{r}{6}\left(\pi r^2 + 4\pi x^2 + 0\right) = 2 \cdot \frac{r}{6}\left(\pi r^2 + 4\pi \cdot \frac{3}{4} r^2\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$

2. **Trojúhelník:** V trojúhelníku s výškou v_a na stranu a bude $a_1 = a$, $a_2 = \frac{a}{2}$ (délka střední příčky), $a_3 = 0$ a po dosazení do vzorce $S = \frac{v_a}{6}\left(a + 4 \cdot \frac{a}{2} + 0\right) = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Rovnoběžník: Pro rovnoběžník je $a_1 = a_2 = a_3 = a$, proto

$$S = \frac{v}{6}\left(a + 4a + a\right) = \frac{v}{6} \cdot 6a = a \cdot v$$

Lichoběžník: V lichoběžníku je délka střední příčky rovna aritmetickému průměru základen, tedy $a_1 = a, a_2 = \frac{a+c}{2}, a_3 = c$ a dosazením do Simpsonova vzorce dostáváme opět známý vzorec pro obsah lichoběžníka.

$$S = \frac{v}{6}\left(a + 4 \cdot \frac{a+c}{2} + c\right) = \frac{v}{6} \cdot \left(a + 2a + 2c + c\right) = \frac{v}{6} \cdot \left(3a + 3c\right) = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$

Doplňkové aktivity

Žáci mohou ověřit platnost vzorce pro válec a kužel, dále mohou najít v tabulkách vzorec pro objem komolého jehlanu a komolého kužele a ověřit platnost Simpsonova vzorce pro tato tělesa. Na internetu se mohou pokusit najít křestní jméno a informace o autorovi univerzálního vzorce.

Přesahy a vazby	**Integrální počet**
Obrazový materiál	Od Gage Skidmore from Peoria, AZ, United States of America (Bart Simpson statue Uploaded by maybeMaybeMaybe) [CC-BY-SA-2.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0)], prostřednictvím Wikimedia Commons)