

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

JAK JE DALEKO K BAZÉNU?

Popis aktivity

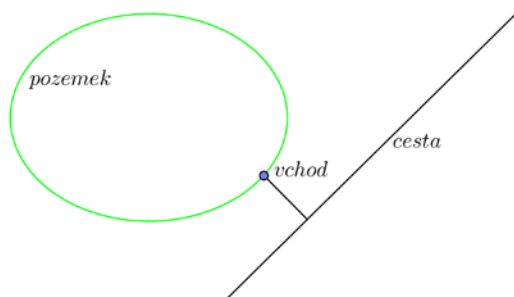
Určení tečny kuželosečky rovnoběžné s danou přímkou, určení vzdálenosti bodu od přímky

Předpokládané znalosti

Analytické vyjádření elipsy a přímky, rovnice rovnoběžných přímek, řešení soustavy rovnic, řešení kvadratické rovnice, vzdálenost bodu od přímky

Zadání

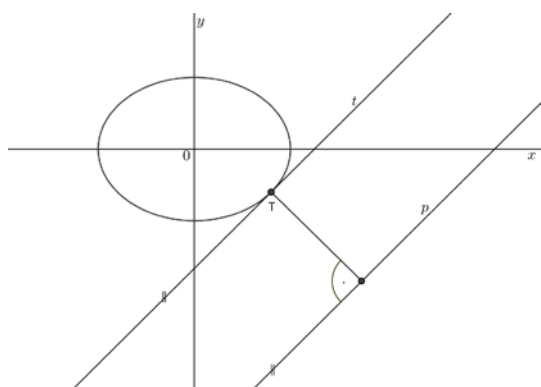
Obec má k dispozici pozemek eliptického tvaru, který chce oplotit a vybudovat na něm bazén. Je třeba najít místo pro vchod do oploceného areálu, aby bylo co nejbližší příjezdové cestě, která vede v blízkosti pozemku, protože bude třeba vybudovat odbočku z příjezdové cesty. Aby bylo možné určit náklady na vybudování odbočky, potřebujeme také vědět, jak bude odbočka dlouhá.



Analytické vyjádření elipsy je $9x^2 + 16y^2 - 9216 = 0$, příjezdová cesta je přímka o rovnici $x - y - 100 = 0$, jednotkou v Oxy je $1m$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Můžeme si znovu znázornit situaci v soustavě souřadnic. Hledané místo pro vchod do areálu je dotykovým bodem tečny t elipsy, která je rovnoběžná s danou přímkou p . Délka odbočky, kterou máme zjistit, je pak rovna vzdálenosti bodu T od přímky p .



Rovnice tečny t , která je rovnoběžná s přímkou p je $x - y + c = 0$ (rovnoběžné přímky mají stejný směrový, tedy i normálový vektor). Protože tečna elipsy je přímka, která má s elipsou jediný společný bod, musí mít soustava rovnic

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$9x^2 + 16y^2 - 9216 = 0$$

$$x - y + c = 0$$

se dvěma neznámými x, y a parametrem c právě jedno řešení. Soustavu budeme řešit metodou dosazovací – z lineární rovnice vyjádříme např. neznámou y a dosadíme do rovnice elipsy. Dostaneme $y = x + c$ a po dosazení

$$9x^2 + 16(x + c)^2 - 9216 = 0$$

$$9x^2 + 16(x^2 + 2xc + c^2) - 9216 = 0$$

$$25x^2 + 32xc + 16c^2 - 9216 = 0$$

Poslední rovnice je kvadratická rovnice s neznámou x a parametrem c . Protože soustava má mít jediné řešení, musí mít i kvadratická rovnice právě jedno řešení a to nastane právě když diskriminant kvadratické rovnice bude roven nule. V našem případě $D = 32^2 c^2 - 4 \cdot 25 \cdot (16c^2 - 9216) = 0$.

Úpravami této rovnice s neznámou c dostáváme

$$576c^2 = 100 \cdot 9216$$

$$|c| = \frac{10 \cdot 96}{24}$$

$$|c| = 40$$

Poslední rovnice má dvě řešení, existují tedy dvě tečny rovnoběžné s danou přímkou.

$$t: y = x - 40 \Rightarrow x - y - 40 = 0$$

$$t': y = x + 40 \Rightarrow x - y + 40 = 0$$

Společný bod T tečny t a elipsy má souřadnici $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (protože $D = 0$), tedy v našem případě

$$\text{pro } c = -40 \text{ je } x_0 = \frac{-32 \cdot (-40)}{2 \cdot 25} = \frac{128}{5} = 25,6 \text{ a } y_0 = x_0 - 40 = 25,6 - 40 = -14,4,$$

$$T[25,6; -14,4].$$

Pro tečnu $t' (c = 40)$ pak $T'[-25,6; 14,4]$.

Vzdálenost bodu T od přímky p vypočteme podle vzorce $|T, p| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, kde a, b, c jsou

koeficienty z rovnice přímky a x_0, y_0 jsou souřadnice bodu T .

V našem případě

$$|T, p| = \frac{|25,6 + 14,4 - 100|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 30 \cdot \sqrt{2}, |T', p| = \frac{|-25,6 - 14,4 - 100|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{140}{\sqrt{2}} = 70 \cdot \sqrt{2}.$$

Protože $30\sqrt{2} < 70\sqrt{2}$, je hledaným bodem pro vchod do areálu bod T a hledaná vzdálenost $30\sqrt{2} \text{ m}$, tedy asi $42,5 \text{ m}$.

Doplňkové aktivity

Můžeme se ptát na rozměry daného pozemku – tedy na velikosti poloos elipsy. Žáci mohou navrhnout tvar a umístění bazénu na pozemku, případně parkoviště před vstupem do areálu apod.