INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

DÍVEJ SE A UVIDÍŠ 2

Popis aktivity

Práce s přirozenými čísly, rozklad na prvočinitele čísel, jejich dělitelů i násobků.

Předpokládané znalosti

Operace s přirozenými čísly

Zadání

	Prvočinitelé									
	2	3	5	7	11	13	17	19	23	
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										

V tabulce jsou u každého přirozeného čísla vybarvena políčka s jejich prvočíselnými děliteli. Pomocí těchto čísel je možné provést rozklad každého přirozeného čísla na prvočinitele.

1. Vypište všechny prvočíselné dělitele čísel 15–20 a zapište prvočíselný rozklad (rozklad na prvočinitele) čísel 15–20.

2. Ve vybarvených polích čísla 24 je uvedeno, kolikrát se v prvočíselném rozkladu jednotlivá prvočísla vyskytují (tedy jejich mocnitel).
   Platí: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$
   Ve zbývajících polích doplňte mocnitele (exponenty), které jsou u jednotlivých prvočísel v prvočíselném rozkladu.

3. Proveďte násobení $4 \cdot 6$ a vysvětlete, jak souvisí prvočíselný rozklad výsledku s prvočíselným rozkladem obou činitelů.

4. Proveďte dělení $24 : 6$ a vysvětlete, jak souvisí prvočíselný rozklad výsledku s prvočíselnými rozklady dělence a dělitele.

5. Určete všechny dělitele čísla 24 a vysvětlete, jakou vlastnost má prvočíselný rozklad každého z dělitelů.

6. Jaké společné dělitele mají čísla 24 a 20? Vysvětlete, jakou vlastnost mají prvočíselné rozklady společných dělitelů.

7. Jak lze najít největší společný dělitel?

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Možný postup řešení, metodické poznámky

	Prvočinitelé									
	2	3	5	7	11	13	17	19	23	
1										
2	1									
3		1								
4	2									
5			1							
6	1	1								
7				1						
8	3									
9		2								
10	1		1							
11					1					
12	2	1								
13						1				
14	1			1						
15		1	1							
16	4									
17							1			
18	1	2								
19								1		
20	2		1							
21		1		1						
22	1				1					
23									1	
24	3	1								
25			2							
26	1					1				

V tabulce jsou u každého přirozeného čísla vybarvena políčka s jejich prvočíselnými děliteli. Pomocí těchto čísel je možné provést rozklad každého přirozeného čísla na prvočinitele.

1. Vypište všechny prvočíselné dělitele čísel 10–15.

15	3	5	$15 = 3 \cdot 5$
16	2		$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
17	17		$17 = 17$
18	2	3	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
19	19		$19 = 19$
20	2	5	$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

3. Ve vybarvených polích čísla 24 je uvedeno, kolikrát se v prvočíselném rozkladu jednotlivá prvočísla vyskytují (tedy jejich mocnitel).
   Platí: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$
   Ve zbývajících polích doplňte mocnitele (exponenty), které jsou u jednotlivých prvočísel v prvočíselném rozkladu.

4. Proveďte násobení $4 \cdot 6$ a vysvětlete, jak souvisí prvočíselný rozklad výsledku s prvočíselným rozkladem obou činitelů. $4 \cdot 6 = 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = 2^3 \cdot 3^1$
   Exponenty u mocnin se stejným základem se sčítají.

5. Proveďte dělení $24 : 6$ a vysvětlete, jak souvisí prvočíselný rozklad výsledku s prvočíselnými rozklady dělence a dělitele. $24 : 6 = (2^3 \cdot 3^1) : (2^1 \cdot 3^1) = 2^2$
   Exponenty u mocnin se stejným základem se odečtou.

6. Určete všechny dělitele čísla 24 a vysvětlete, jakou vlastnost má prvočíselný rozklad každého z dělitelů.
   V žádném děliteli nemůže být vyšší mocnina prvočinitele, než je u prvočinitelů v prvočíselném rozkladu čísla 24. Dělitele hledáme v tabulce v řádcích nad číslem 24. V žádném vybarveném políčku nalezeného dělitele nesmí být uvedeno větší číslo než v poli, které je na řádku u čísla 24 umístěno ve stejném sloupci.

24	2^3	3^1
12	2^2	3^1
6	2^1	3^1
8	2^3	
4	2^2	
2	2^1	
1		

7. Jaké společné dělitele mají čísla 24 a 20?
   Vysvětlete, jakou vlastnost mají prvočíselné rozklady společných dělitelů obou čísel.
   Společní dělitelé: 1, 2 a 4. Viz vysvětlení je v úkolu 6. Rozdíl je jen v tom, že podmínka musí být současně splněna pro oba dělence (20 i 24).

8. Jak lze najít největší společný dělitel?

   Největší společný dělitel nalezneme mezi společnými děliteli. Vybíráme z nich největší číslo (řádek, který je nejníž).

Doplňkové aktivity

Žáci si mohou všimnout, že se některé tvary se v tabulce pravidelně opakují.

8				
9				
10				

Může se např. zopakovat stejný obrazec, jaký je na řádcích 8, 9 a 10?

Řešení:

1. Které násobky jsou skryty pod vybarvenými poli?

Důležitý je zejména druhý a třetí sloupec. Kontrolu je třeba provést ještě ve čtvrtém sloupci.

Ve druhém sloupci je ve druhém řádku vyznačen lichý násobek čísla 3 a ve třetím sloupci je v posledním řádku násobek čísla 10. Čtvrtý sloupec (násobky sedmi) je prázdný.

2. Kdy se obdobná situace zopakuje?

Platí:

$$3 \cdot (2k - 1) = 5l - 1$$

Po úpravě dostáváme:

$$6k - 2 = 5l$$

$$l = \frac{6k - 2}{5} = k + \frac{k - 2}{5}$$

proto musí platit

$$k = 5n + 2; n \in \mathbf{N}_0$$

n	k	l	Trojice řádků
0	2	2	8, 9, 10
1	7	8	38, 39, 40
~~2~~	12	14	68, 69, ~~70~~
~~3~~			~~98~~, 99, 100
4			128, 129, 130
5			158, 159, 160
~~6~~			188, ~~189,~~ 190
7			218, 219, 220
…			
$n \neq 7m + 2$ $n \neq 7m + 3$ $n \neq 7m + 6$	$5n + 2$	$6n + 2$	$30n + 8;$ $30n + 9;$ $30n + 10$

Dále musí být poslední sloupec prázdný, tedy žádné z trojice čísel $30n + 8; 30n + 9; 30n + 10$ nesmí být násobkem čísla 7.

Tedy platí:

$7 \nmid 30n + 8 \ \wedge \ 7 \nmid 30n + 9 \ \wedge \ 7 \nmid 30n + 10$

neboli

$7 \nmid 2n + 1 \ \wedge \ 7 \nmid 2n + 2 \ \wedge \ 7 \nmid 2n + 3$

Proto za n nelze dosadit čísla:

$\{2, 3, 6, 9, 10, 13, \dots\}$,

tj. nelze dosadit čísla

$7m + 2; 7m + 3; 7m + 6;$ kde $m \in \mathbf{N}_0$

Obrazový materiál	Dílo autora

Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.