

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

HŘIŠTĚ PRO MATEMATIKY

Popis aktivity

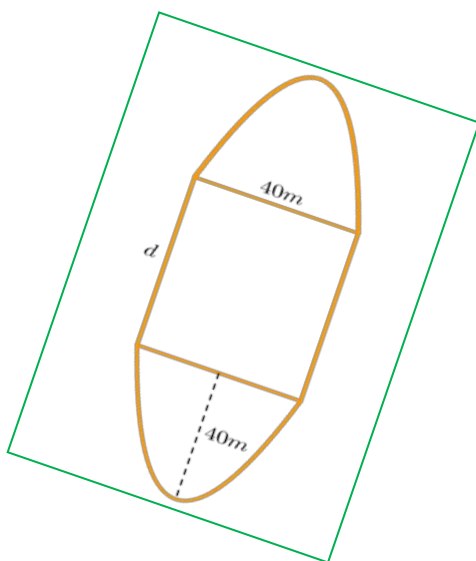
Výpočet obsahu rovinného obrazce užitím integrálního počtu.

Předpokládané znalosti

Užití integrálního počtu, obsah obrazce, vzorec pro obsah obdélníka

Zadání

Hřiště u matematického gymnázia má zvláštní tvar – na obdélník s jedním rozměrem 40 m navazují dva parabolické oblouky s výškou 40 m (viz obr.). Navíc je zajímavé, že obsah obdélníka je roven součtu obsahů zbývajících dvou částí. Jaký je druhý rozměr obdélníka?

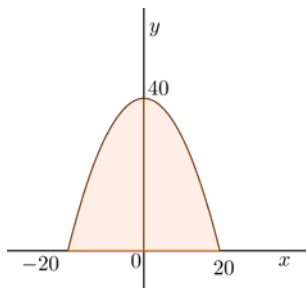


Možný postup řešení, metodické poznámky

Jedná se o obrazec osově souměrný, stačí proto uvažovat jeho polovinu. Musí tedy platit, že obsah S obrazce, který je omezen parabolou, je roven obsahu poloviny obdélníka, jehož jedna strana má délku 40 m. Označíme-li hledanou délku strany obdélníka např. d , pak $S = 40 \cdot \frac{d}{2} = 20d$, tedy

$$d = \frac{S}{20}.$$

Abychom určili obsah S , parabolou nejdříve umístíme vhodně v soustavě souřadnic a určíme její funkční předpis.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Parabola je grafem kvadratické funkce $f : y = 40 - ax^2, x \in \langle -20; 20 \rangle, a \in R, a \neq 0$.

Protože parabola protíná osu x v bodě $[20; 0]$, musí platit: $0 = 40 - a \cdot 20^2 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$.

Je tedy $f : y = 40 - \frac{x^2}{10}, x \in \langle -20; 20 \rangle$ a obsah S obrazce, který je omezen touto parabolou a osou x můžeme spočítat pomocí integrálního počtu.

$$S = \int_{-20}^{20} \left(40 - \frac{x^2}{10} \right) dx = 2 \int_0^{20} \left(40 - \frac{x^2}{10} \right) dx = 2 \left[40x - \frac{x^3}{30} \right]_0^{20} = 2 \left(800 - \frac{8000}{30} \right) = 2 \cdot \frac{1600}{3} = \frac{3200}{3}.$$

$$\text{Pak } d = \frac{3200}{3 \cdot 20} = \frac{160}{3}.$$

Druhá strana obdélníka má tedy délku $\frac{160}{3}$ m (přibližně 53,3 m).

Doplňkové aktivity

Místo parabolického oblouku můžeme uvažovat např. eliptický oblouk resp. půlkružnici.

Obrazový materiál | Dílo autora