evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ODŘÍZNEME HRANY POČTVRTÉ

Popis aktivity

Na situaci, která vznikne po řezu krychle rovinou, řeší úloha obecně zadaný problém – objem hranolu.

Předpokládané znalosti

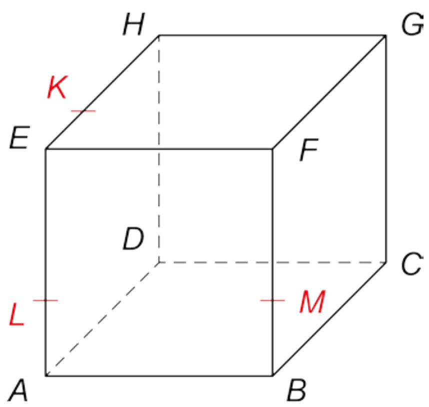
Krychle, popř. volné rovnoběžné promítání, hranol, objem

Potřebné pomůcky

rýsovací potřeby

Zadání

Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Dále jsou dány body *K* na hraně *EH*, *L* na hraně *AE* a *M* na hraně *BF*. Úsečka *LM* je rovnoběžná s hranou *AB*.

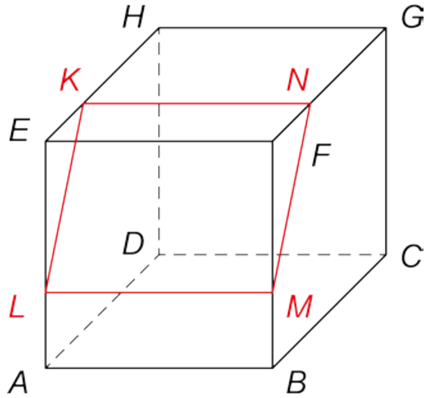


1. Sestrojte průnik roviny *KLM* s krychlí *ABCDEFGH*. Vznikne tak hranol s podstavou *ELK* a výškou *EF*.
2. Označme *x* délku úsečky *EK*. Určete, jaká má být délka úsečky *EL*, aby objem tohoto hranolu byl roven třetině objemu krychle *ACDEFGH*.

Možný postup řešení, metodické poznámky

1. Stěny krychle *ADEH* a *BCGF* leží v rovnoběžných rovinách, proto budou průsečnice těchto rovin s jakoukoli třetí s nimi různoběžnou rovinou rovnoběžné přímky. V našem případě to budou přímky *KL* a přímka, která prochází bodem *M* a leží v rovině *BCG*.
Když sestrojíme přímku, která je rovnoběžná s přímkou *KL* a prochází bodem *M*, získáme průsečnici roviny *KLM* se stěnou *BCGF*. Řezem je obdélník *KLMN*.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



2. Označme *y* neznámou délku úsečky *EL*. Pomocí délek $x = |EK|$, $y = |EL|$ a $a = |EF|$ můžeme zapsat objem hranolu *ELKFMN*. Vyjdeme ze vzorce pro objem hranolu:

$$V_h = S_p \cdot v$$

Podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek *x* a *y*, proto

$$S_p = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Protože je výška hranolu rovna *a*, můžeme psát:

$$V_h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot a$$

Máme najít takovou hodnotu *y*, aby se objem hranolu *ELKFMN* rovnal třetině objemu krychle *ABCDEFGH*. Protože pro objem krychle platí, že $V_k = a^3$, má platit:

$$V_h = \frac{1}{3} \cdot a^3$$

neboli:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot a = \frac{1}{3} a^3$$

Vyjádříme *y* pomocí *x* a *a*:

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot a &= \frac{1}{3}a^3 \qquad \Big|\cdot 6 \\ 3xya &= 2a^3 \qquad \Big|:3xa \\ y &= \frac{2a^3}{3xa} \\ y &= \frac{2a^2}{3x} \end{aligned}$$

Podle podmínek zadání je jasné, že bod *K* i bod *L* mají ležet na hranách krychle. Proto platí, že $0 \le x \le a$ (bod *K* tak zvolíme), a zároveň musí i pro *y* platit, že $0 \le y \le a$.

Je zřejmé, že když je *x* nezáporné číslo, je i hodnota $\frac{2a^2}{3x}$ nezáporná. Podmínka $0 \le y$ je splněna současně s podmínkou $0 \le x$. Musíme proto určit, pro která *x* je hodnota $\frac{2a^2}{3x} \le a$. Řešme nerovnici, přičemž víme, že $x \ge 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{3x} &\le a \qquad \Big|\cdot 3x \\ 2a^2 &\le 3ax \qquad \Big|:3a \\ \frac{2a^2}{3a} &\le x \\ x &\ge \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

Zvolíme-li tedy bod *K* tak, že $y = |EK| \ge \frac{2}{3}a$, bude bod *L* ležet na hraně *AE* tak, že $y = \frac{2a^2}{3x}$.

Poznámka: Aktivita má širší zařazení v kapitole stereometrie – je třeba nalézt řez (ačkoli je velmi jednoduchý) a pak pracovat s objemem vzniklého hranolu v obecném zadání. Zjednodušit lze úlohu tak, že v úvodu zadáme např. $|AB| = a = 3$. Nejobtížnější částí řešení je závěrečné hledání podmínek.

Doplňkové aktivity

Aktivitu lze použít v návaznosti na aktivity Odřízneme rohy poprvé atd. a Odřízneme hrany poprvé atd. Na aktivitu pak navazují aktivity Odřízneme hrany popáté atd. a aktivity Vybrousíme diamant poprvé atd.

Obrazový materiál	Dílo autora