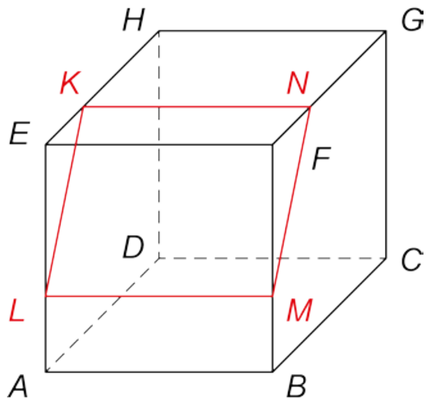
ODŘÍZNEME HRANY POČTVRTÉ - ŘEŠENÍ

1. Stěny krychle *ADEH* a *BCGF* leží v rovnoběžných rovinách, proto budou průsečnice těchto rovin s jakoukoli třetí s nimi různoběžnou rovinou rovnoběžné přímky. V našem případě to budou přímky *KL* a přímka, která prochází bodem *M* a leží v rovině *BCG*.
Když sestrojíme přímku, která je rovnoběžná s přímkou *KL* a prochází bodem *M*, získáme průsečnici roviny *KLM* se stěnou *BCGF*. Řezem je obdélník *KLMN*.



2. Označme *y* neznámou délku úsečky *EL*. Pomocí délek $x = |EK|$, $y = |EL|$ a $a = |EF|$ můžeme zapsat objem hranolu *ELKFMN*. Vyjdeme ze vzorce pro objem hranolu:

$$V_h = S_p \cdot v$$

Podstavu tvoří pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek *x* a *y*, proto

$$S_p = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Protože je výška hranolu rovna *a*, můžeme psát:

$$V_h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot a$$

Máme najít takovou hodnotu *y*, aby se objem hranolu *ELKFMN* rovnal třetině objemu krychle *ABCDEFGH*. Protože pro objem krychle platí, že $V_k = a^3$, má platit:

$$V_h = \frac{1}{3} \cdot a^3$$

neboli:

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot a = \frac{1}{3} a^3$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Vyjádříme *y* pomocí *x* a *a*:

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot a=\frac{1}{3}a^3 \qquad \Big|\cdot 6$$
$$3xya=2a^3 \qquad \Big| :3xa$$
$$y=\frac{2a^3}{3xa}$$
$$y=\frac{2a^2}{3x}$$

Podle podmínek zadání je jasné, že bod *K* i bod *L* mají ležet na hranách krychle. Proto platí, že $0\le x\le a$ (bod *K* tak zvolíme), a zároveň musí i pro *y* platit, že $0\le y\le a$.

Je zřejmé, že když je *x* nezáporné číslo, je i hodnota $\frac{2a^2}{3x}$ nezáporná. Podmínka $0\le y$ je splněna současně s podmínkou $0\le x$. Musíme proto určit, pro která *x* je hodnota $\frac{2a^2}{3x}\le a$. Řešme nerovnici, přičemž víme, že $x\ge 0$:

$$\frac{2a^2}{3x}\le a \qquad \Big|\cdot 3x$$
$$2a^2\le 3ax \qquad \Big| :3a$$
$$\frac{2a^2}{3a}\le x$$
$$x\ge\frac{2}{3}a$$

Zvolíme-li tedy bod *K* tak, že $y=|EK|\ge\frac{2}{3}a$, bude bod *L* ležet na hraně *AE* tak, že $y=\frac{2a^2}{3x}$.

Poznámka: Aktivita má širší zařazení v kapitole stereometrie – je třeba nalézt řez (ačkoli je velmi jednoduchý) a pak pracovat s objemem vzniklého hranolu v obecném zadání. Zjednodušit lze úlohu tak, že v úvodu zadáme např. $|AB|=a=3$. Nejobtížnější částí řešení je závěrečné hledání podmínek.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.