INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# ROZTRŽENÁ KRUŽNICE

**Popis aktivity**

Aplikace vědomostí o goniometrických funkcích v pravoúhlém trojúhelníku (případně o úhlech v kružnici), sestavení předpisu goniometrické funkce.

**Předpokládané znalosti**

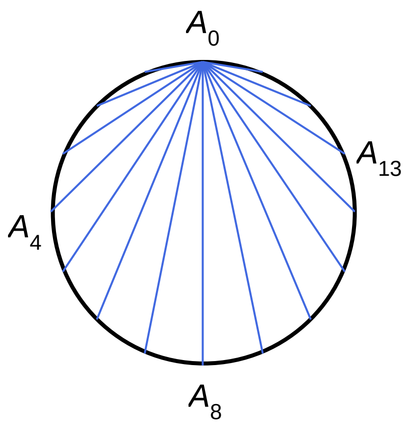
Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku, případně v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, graf funkce

**Potřebné pomůcky**

rýsovací potřeby

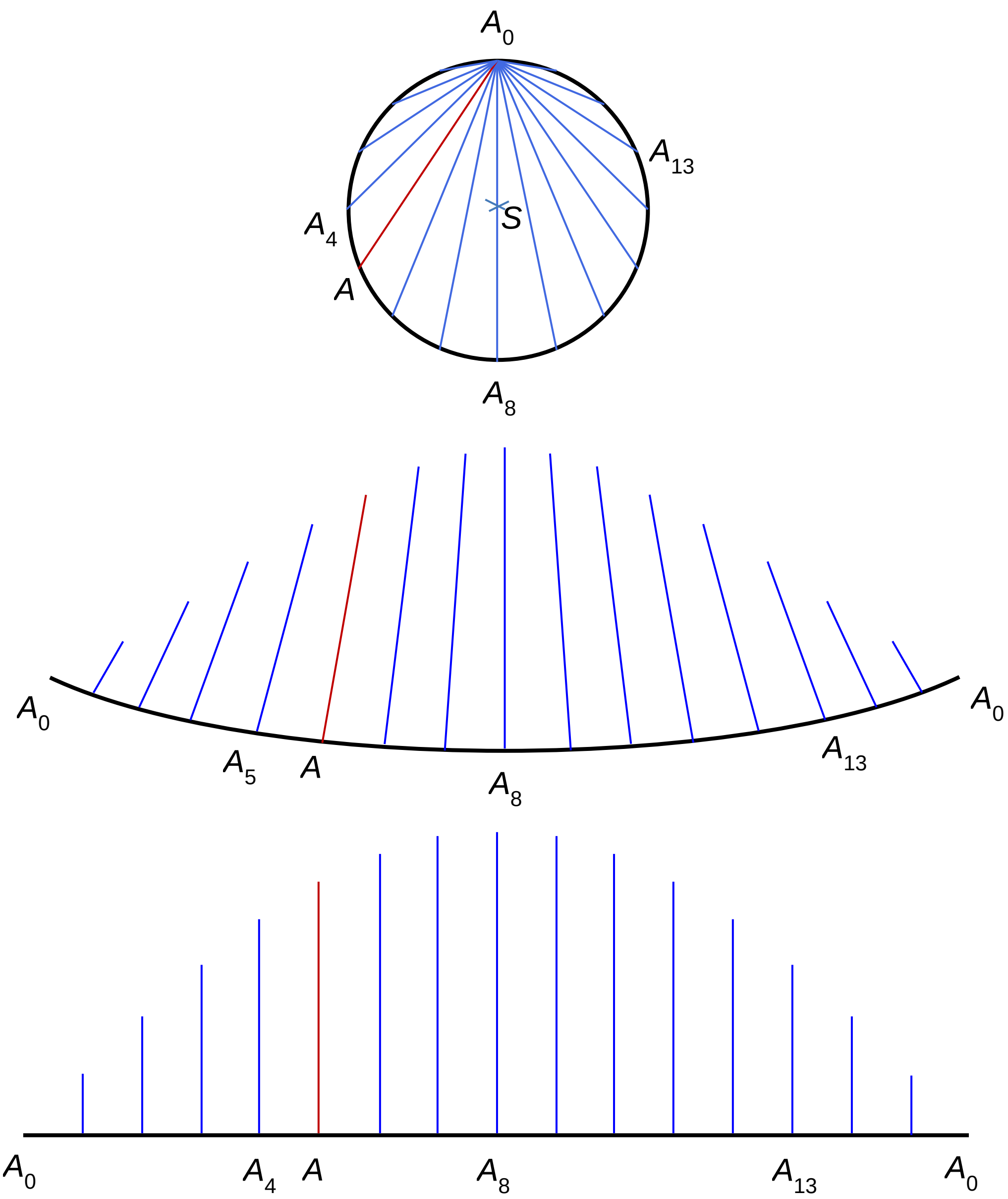
**Zadání**

Na kružnici s poloměrem 1 bylo umístěno šestnáct bodů $A_0$–$A_{15}$, které kružnici rozdělily na 16 stejně dlouhých úseků. Bod $A_0$ byl úsečkami spojen s ostatními patnácti body na kružnici.




Kružnice byla v bodě $A_0$ rozdělena a rozvinutím vytvořila společně s 15 úsečkami srovnanými do svislé polohy graf funkce.


*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

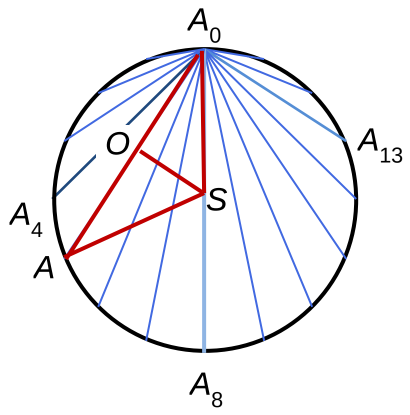



1. Odhadněte, o jakou funkci se jedná.
2. Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Kromě bodů $A_0$–$A_{15}$ počítejte i s ostatními body $A$ na kružnici. Umístění bodu $A$ je určeno velikostí $\omega$ středového úhlu $A_0SA$, kde $S$ je střed kružnice.
3. Určete další vlastnosti funkce.
4. Zapište předpis funkce.

**Metodické poznámky a řešení**

1. Zdá se, že jde o goniometrickou funkci sinus.
2. Definiční obor je interval od 0 do 2π (délka jednotkové kružnice). Obor hodnot je interval od 0 do 2 (průměr kružnice).
3. Funkce má extrém v bodě π a nabývá hodnoty 2. Jedná se o maximum. Graf funkce je souměrný

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*




podle svislé osy procházející bodem, v němž funkce nabývá maxima.

4. Platí:

Středový úhel má velikost $\omega = |A_0SA|$
Poloměr kružnice je 1.
Pro $\omega < \pi$ platí:

$$\frac{|AO|}{1} = \sin\frac{\omega}{2}, \text{ tedy } |A_0A| = 2 \cdot |AO| = 2 \,.\, \sin\frac{\omega}{2}$$

(Pokud označíme $\frac{\omega}{2} = \varphi$, pak $\varphi$ je mj. obvodový úhel příslušející oblouku $A_0A$.)

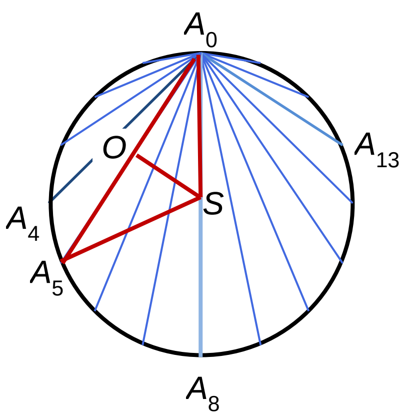
Pro $\omega > \pi$ nahradíme $\omega$ rozdílem $2\pi - \omega$ a pokračujeme obdobně.
Pro $\omega = \pi$ je $|AO| = 1$, (resp. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$).

Předpis funkce je $y = 2\sin\frac{\omega}{2}$ , pro $\omega \in \langle 0; \pi\rangle$, resp. je $y = 2\sin\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right)$ pro $\omega \in \langle \pi; 2\pi\rangle$. Protože platí rovnost $\sin\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right) = \sin\frac{\omega}{2}$, předpis funkce lze v celém definičním oboru $\langle 0; 2\pi\rangle$ psát ve tvaru $y = 2\sin\frac{\omega}{2}$.

**Doplňkové aktivity**

Problematiku lze aplikovat na posloupnosti:
V závislosti na pořadí $n$ zapište předpis posloupnosti, jejímiž členy jsou délky úseček $A_0A_n$.

Řešení:




Platí:

Středový úhel $\omega_n = |A_0SA_n| = n \cdot \frac{2\pi}{16} = \frac{n \cdot \pi}{8}$

Poloměr kružnice je 1.
Pro $n < 8$ platí:

$$\frac{|A_nO|}{1} = \sin\frac{\omega_n}{2}, \text{ tedy } |A_0A_n| = 2 \cdot |A_nO| = 2 \,.\, \sin\frac{\omega_n}{2} = 2 \cdot \sin\left(\frac{n}{16} \cdot \pi\right)$$

Označíme-li $\frac{\omega_n}{2} = \varphi_n$, pak $\varphi_n$ je obvodový úhel příslušející oblouku $A_0A_n$.

Pro $n > 8$ nahradíme $n$ rozdílem $16 - n$ a pokračujeme obdobně.
Pro $n = 8$ je $\varphi_8 = \frac{\pi}{2}$ a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

*Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká*
*Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.*

| | |
|---|---|
| Pro členy posloupnosti tedy platí: $a_n = 2 \cdot \sin\left(\frac{n}{16} \cdot \pi\right)$ | |
| **Obrazový materiál** | Dílo autora |