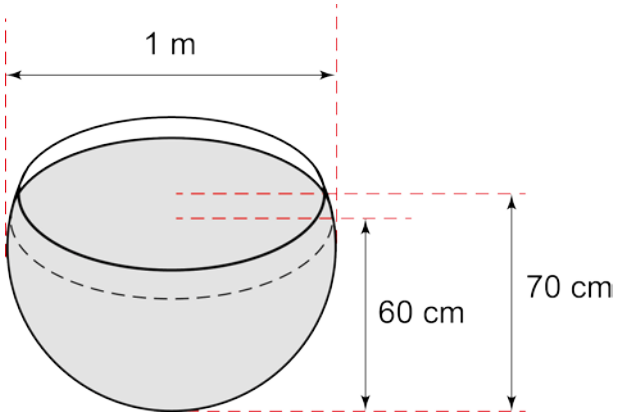
SKŘETI SI VAŘÍ VEČEŘI

Popis aktivity
Na jednoduchém problému úloha procvičuje objem kulové úseče
Předpokládané znalosti
Kulová úseč, objem kulové úseče, Pythagorova věta
Potřebné pomůcky
rýsovací potřeby
Zadání

Skřeti si vaří večeři. Naházeli do kotle leklé ryby, které našli na kraji vyschlého jezera, a zalili to vodou. Netuší, že během vaření břečka zvětší svůj objem o 15 % (ryby opravdu nebyly čerstvé). Nepřeteče jim kotel?

Kotel má tvar kulové úseče, rozměry jsou na obrázku:



Možný postup řešení, metodické poznámky

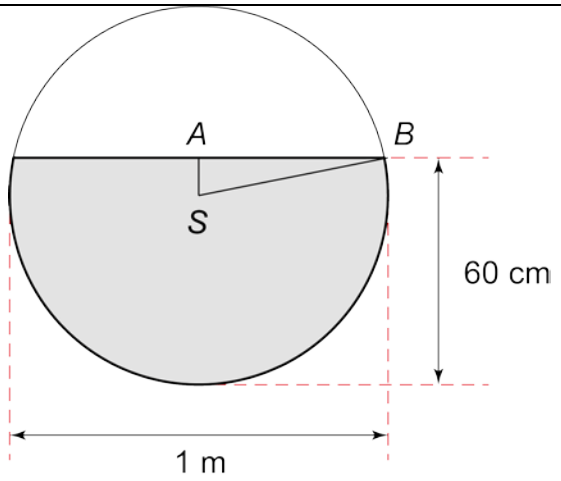
Vypočítáme objemy dvou kulových úsečí. První z nich je úseč, která je tvořena zaplněnou částí kotle, druhá je celý kotel. Pak zjistíme, zda 115 % objemu zaplněné části kotle převýší objem celého kotle. Pro objem kulové úseče použijeme vzorec:

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right)$$

kde *v* je výška kulové úseče a ρ je poloměr její podstavy.

Nakresleme obrázek pro menší z obou úsečí:

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Úseč vznikla z koule, jejíž průměr se rovná 1 m, poloměr je tedy 50 cm. Výška úseče je 60 cm. Pro výpočet jejího objemu však potřebujeme znát poloměr podstavy, tedy délku úsečky *AB*.
Pro její výpočet použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku *ABS*. Známe totiž délky dvou stran tohoto trojúhelníku: *SB* je poloměr koule a *SA* je rozdíl výšky úseče a poloměru koule. Platí:

$$|SB|^2 = |SA|^2 + |AB|^2$$

Dosaďme známé hodnoty. Uvědomme si, že stačí určit druhou mocninu poloměru podstavy, protože ve vzorci pro výpočet objemu úseče vystupuje pouze ρ^2, což je v našem případě $|AB|^2$:

$$\begin{aligned} |SB|^2 &= |SA|^2 + |AB|^2 \\ 50^2 &= (60-50)^2 + |AB|^2 \\ 2500 &= 100 + |AB|^2 \\ |AB|^2 &= 2400 \end{aligned}$$

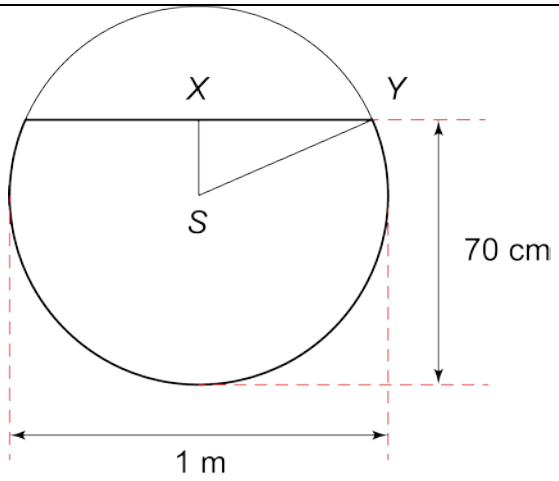
Vypočítejme objem večeře:

$$V_v = \frac{\pi v}{6}\cdot\left(3\rho^2 + v^2\right) = \frac{\pi\cdot 60}{6}\cdot\left(3\cdot 2400 + 60^2\right) = 10\pi\cdot\left(7200+3600\right) = 10\pi\cdot 10800 =$$
$$= 108000\cdot\pi \doteq 339120$$

Objem večeře činí 339 120 cm^3 (což je pro představu, ačkoli to nepotřebujeme, 339,12 l).

Pro výpočet objemu celého kotle použijeme tentýž postup, pouze použijeme výšku úseče rovnu 70 cm:

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.



Trojúhelník *XYS* je pravoúhlý, můžeme vypočítat $|XY|^2$:

$$\begin{aligned} |SY|^2 &= |SX|^2 + |XY|^2 \\ 50^2 &= (70-50)^2 + |XY|^2 \\ 2500 &= 400 + |XY|^2 \\ |XY|^2 &= 2100 \end{aligned}$$

Dosaďme do vzorce pro výpočet objemu kulové úseče:

$$V_k = \frac{\pi v}{6}\cdot\left(3\rho^2 + v^2\right) = \frac{\pi\cdot 70}{6}\cdot\left(3\cdot 2100 + 70^2\right) = \frac{\pi\cdot 35}{3}\cdot\left(6300 + 7900\right) = \frac{\pi\cdot 35}{3}\cdot 11200 \doteq 490293$$

Porovnáme tuto hodnotu se 115 % objemu večeře:

$339120\cdot 1{,}15 = 386538$. Vidíme, že i po zvětšení objemu se skřetům jejich večeře do kotle vejde.

Doporučujeme obrázky promítnout dataprojektorem.

Doplňkové aktivity	
S aktivitou souvisejí aktivity Hobiti si vaří večeři, Trpaslíci si vaří večeři, Trollové si vaří večeři a Elfové si vaří večeři. Jde o jednoduché úlohy na výpočet objemu dalších rotačních těles.	
Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je P. Krupka
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.