

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

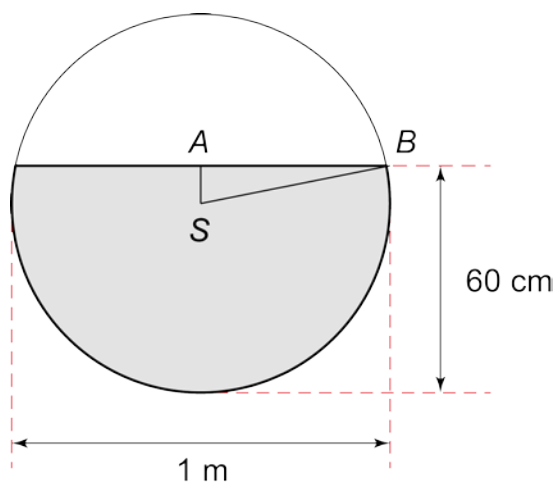
SKŘETI SI VAŘÍ VEČEŘI - ŘEŠENÍ

Vypočítáme objemy dvou kulových úsečí. První z nich je úseč, která je tvořena zaplněnou částí kotle, druhá je celý kotel. Pak zjistíme, zda 115 % objemu zaplněné části kotle převyšuje objem celého kotle. Pro objem kulové úseče použijeme vzorec:

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot (3\rho^2 + v^2)$$

kde v je výška kulové úseče a ρ je poloměr její podstavy.

Nakresleme obrázek pro menší z obou úsečí:



Úseč vznikla z koule, jejíž průměr se rovná 1 m, poloměr je tedy 50 cm. Výška úseče je 60 cm. Pro výpočet jejího objemu však potřebujeme znát poloměr podstavy, tedy délku úsečky AB .

Pro její výpočet použijeme Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku ABS . Známe totiž délky dvou stran tohoto trojúhelníku: SB je poloměr koule a SA je rozdíl výšky úseče a poloměru koule. Platí:

$$|SB|^2 = |SA|^2 + |AB|^2$$

Dosaďme známé hodnoty. Uvědomme si, že stačí určit druhou mocninu poloměru podstavy, protože ve vzorci pro výpočet objemu úseče vystupuje pouze ρ^2 , což je v našem případě $|AB|^2$:

$$\begin{aligned} |SB|^2 &= |SA|^2 + |AB|^2 \\ 50^2 &= (60 - 50)^2 + |AB|^2 \\ 2500 &= 100 + |AB|^2 \\ |AB|^2 &= 2400 \end{aligned}$$

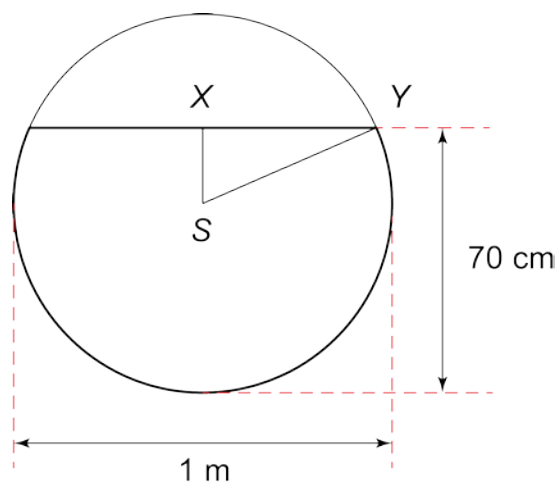
Vypočítejme objem večeře:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$V_v = \frac{\pi v}{6} \cdot (3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi \cdot 60}{6} \cdot (3 \cdot 2400 + 60^2) = 10\pi \cdot (7200 + 3600) = 10\pi \cdot 10800 = 108000 \cdot \pi \doteq 339120$$

Objem večeře činí $339\,120 \text{ cm}^3$ (což je pro představu, ačkoli to nepotřebujeme, $339,12 \text{ l}$).

Pro výpočet objemu celého kotle použijeme tentýž postup, pouze použijeme výšku úseče rovnu 70 cm :



Trojúhelník XYZ je pravoúhlý, můžeme vypočítat $|XY|^2$:

$$\begin{aligned} |SY|^2 &= |SX|^2 + |XY|^2 \\ 50^2 &= (70 - 50)^2 + |XY|^2 \\ 2500 &= 400 + |XY|^2 \\ |XY|^2 &= 2100 \end{aligned}$$

Dosaďme do vzorce pro výpočet objemu kulové úseče:

$$V_k = \frac{\pi v}{6} \cdot (3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi \cdot 70}{6} \cdot (3 \cdot 2100 + 70^2) = \frac{\pi \cdot 35}{3} \cdot (6300 + 7900) = \frac{\pi \cdot 35}{3} \cdot 11200 \doteq 490293$$

Porovnáme tuto hodnotu se 115% objemu večeře:

$339120 \cdot 1,15 = 386538$. Vidíme, že i po zvětšení objemu se skřetům jejich večeře do kotle vejde.