INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SUBSTITUCE NAD ZLATO

Popis aktivity
Řešení různých typů rovnic substitucí.
Předpokládané znalosti
Řešení kvadratické rovnice, převrácené číslo, absolutní hodnota, mocniny se záporným exponentem, počítání s logaritmy, číslo e, přirozený logaritmus
Zadání

Řešte rovnice:

a) $(x+1)^2 = 56 - |x+1|$

b) $e^x = 6 + 40 \cdot e^{-x}$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}} + 6 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}} = 11$

d) $x^{\log x} = \dfrac{x^6}{100000}$

Možný postup řešení, metodické poznámky

Pokud žákům neprozradíme předem, že mají dané rovnice řešit substitucí, můžeme zadat jednotlivé rovnice v různých hodinách jako samostatnou práci a ocenit nápad se substitucí. Pokud uvedeme, že budeme řešit substitucí, pak můžeme ocenit toho žáka, který správnou substituci uvede jako první.

a) V tomto případě není substituce na první pohled zřejmá a většina žáků by asi řešila rovnici diskusí výrazu v absolutní hodnotě.
Stačí si však uvědomit, že $|x+1|^2 = (x+1)^2$ a zavedením nové proměnné $t = |x+1|$ tak převést danou rovnici na rovnici $t^2 + t - 56 = 0$. Rozkladem kvadratického trojčlenu na součin lineárních činitelů dostaneme řešení $t = -8 \vee t = 7$. Pro původní proměnnou x pak řešíme jednoduché rovnice s absolutní hodnotou. Rovnice $|x+1| = -8$ nemá řešení (absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné), řešením rovnice $|x+1| = 7$ je dvouprvková množina $\{-8; 6\}$.

b) Odstraněním záporného exponentu převedeme rovnici na tvar $e^x = 6 + \dfrac{40}{e^x}$. Pokud žáci mají zkušenosti se substitucí, zřejmě ji nyní hned použijí. Pokud budou pokračovat v úpravě rovnice (odstranění zlomku), nezřídka se objeví problém při násobení $e^x \cdot e^x$.
Zavedeme-li novou proměnnou $p = e^x \; (p > 0 \, \forall x \in R)$, pak dostáváme rovnici $p = 6 + \dfrac{40}{p}$, po úpravě kvadratickou rovnici $p^2 - 6p - 40 = 0$ s kořeny $p = -4 \vee p = 10$. Záporný kořen $p = -4$ nevyhovuje podmínce, jediným kořenem původní rovnice je proto číslo x ,pro které platí $10 = e^x \Rightarrow x = \ln 10$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

c) Žáci si možná všimnou, že výrazy $\frac{x}{x+1}$ a $\frac{x+1}{x}$ jsou navzájem převrácené a že $x \neq 0, x \neq -1$, ale je třeba si uvědomit, že pro další řešení bude nutné odstranit třetí odmocniny. Výhodnou substitucí bude tedy zvolení nové proměnné u ve tvaru $u = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$, pak $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{u}$ a daná rovnice přejde v rovnici $3u + 6 \cdot \frac{1}{u} = 11$. Také v tomto případě se jedná o kvadratickou rovnici ve tvaru $3u^2 - 11u + 6 = 0$, jejíž kořeny jsou $u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 12 \cdot 6}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6}$ neboli $u_1 = 3 \vee u_2 = \frac{2}{3}$.

Po návratu k původní proměnné x řešíme rovnice $3 = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$ resp. $\frac{2}{3} = \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$. Umocněním pak dostáváme rovnice ve tvaru $27 = \frac{x}{x+1}$ nebo $\frac{8}{27} = \frac{x}{x+1}$. Jejich řešením jsou čísla $x = \frac{-27}{26} \vee x = \frac{8}{19}$. Obě čísla jsou řešením dané rovnice, o čemž se můžeme přesvědčit zkouškou.

d) Substituce u této rovnice patrná není, poradíme žákům, aby obě strany rovnice zlogaritmovali (za předpokladu, že $x > 0, x \neq 1$). Postupnými úpravami pak dostáváme:

$$\log x^{\log x} = \log \frac{x^6}{100000}$$

$$\log x \cdot \log x = \log x^6 - \log 100000$$

$$(\log x)^2 = 6\log x - 5$$

$$(\log x)^2 - 6\log x + 5 = 0$$

Poslední rovnice vede opět po substituci na rovnici kvadratickou. Položíme-li $\log x = z$, budeme řešit rovnici $z^2 - 6z + 5 = 0$. Kořeny $z = 5 \vee z = 1$ pak vedou k řešení základních logaritmických rovnic. Je-li $\log x = 5 \Rightarrow x = 10^5$, je-li $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$. Oba kořeny vyhovují podmínkám a jsou řešením původní rovnice.

Doplňkové aktivity
Připomeneme žákům rovnice bikvadratické a jejich řešení pomocí substituce. Žáci se mohou sami pokusit sestavovat podobné rovnice (zpětně od rovnice kvadratické).