SUBSTITUCE NAD ZLATO - ŘEŠENÍ

a) Stačí si uvědomit, že $|x+1|^2=(x+1)^2$ a zavedením nové proměnné $t=|x+1|$ tak převést danou rovnici na rovnici $t^2+t-56=0$. Rozkladem kvadratického trojčlenu na součin lineárních činitelů dostaneme řešení $t=-8 \vee t=7$. Pro původní proměnnou x pak řešíme jednoduché rovnice s absolutní hodnotou. Rovnice $|x+1|=-8$ nemá řešení (absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné), řešením rovnice $|x+1|=7$ je dvouprvková množina $\{-8;6\}$.

b) Odstraněním záporného exponentu převedeme rovnici na tvar $e^x=6+\frac{40}{e^x}$. Pokud žáci mají zkušenosti se substitucí, zřejmě ji nyní hned použijí. Pokud budou pokračovat v úpravě rovnice (odstranění zlomku), nezřídka se objeví problém při násobení $e^x \cdot e^x$. Zavedeme-li novou proměnnou $p=e^x$ $(p>0 \forall x \in R)$, pak dostáváme rovnici $p=6+\frac{40}{p}$, po úpravě kvadratickou rovnici $p^2-6p-40=0$ s kořeny $p=-4 \vee p=10$. Záporný kořen $p=-4$ nevyhovuje podmínce, jediným kořenem původní rovnice je proto číslo x, pro které platí $10=e^x \Rightarrow x=\ln 10$.

c) Je třeba si všimnout, že výrazy $\frac{x}{x+1}$ a $\frac{x+1}{x}$ jsou navzájem převrácené a že $x \neq 0, x \neq -1$, ale je třeba si uvědomit, že pro další řešení bude nutné odstranit třetí odmocniny. Výhodnou substitucí bude tedy zvolení nové proměnné u ve tvaru $u=\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$, pak $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{u}$ a daná rovnice přejde v rovnici $3u+6\cdot\frac{1}{u}=11$. Také v tomto případě se jedná o kvadratickou rovnici ve tvaru $3u^2-11u+6=0$, jejíž kořeny jsou $u_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-12\cdot 6}}{6}=\frac{11\pm 7}{6}$ neboli $u_1=3 \vee u_2=\frac{2}{3}$.

Po návratu k původní proměnné x řešíme rovnice $3=\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$ resp. $\frac{2}{3}=\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$. Umocněním pak dostáváme rovnice ve tvaru $27=\frac{x}{x+1}$ nebo $\frac{8}{27}=\frac{x}{x+1}$. Jejich řešením jsou čísla $x=\frac{-27}{26} \vee x=\frac{8}{19}$. Obě čísla jsou řešením dané rovnice, o čemž se můžeme přesvědčit zkouškou.

d) Substituce u této rovnice patrná není, je třeba obě strany rovnice zlogaritmovat (za předpokladu, že $x>0, x \neq 1$). Postupnými úpravami pak dostáváme:

$$\log x^{\log x} = \log \frac{x^6}{100000}$$
$$\log x \cdot \log x = \log x^6 - \log 100000$$
$$(\log x)^2 = 6 \log x - 5$$
$$(\log x)^2 - 6 \log x + 5 = 0$$

Poslední rovnice vede opět po substituci na rovnici kvadratickou. Položíme-li $\log x = z$, budeme řešit rovnici $z^2 - 6z + 5 = 0$. Kořeny $z = 5 \vee z = 1$ pak vedou k řešení základních logaritmických rovnic. Je-li $\log x = 5 \Rightarrow x = 10^5$, je-li $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$. Oba kořeny vyhovují podmínkám a jsou řešením původní rovnice.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.