

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TRPASLÍCI SI VAŘÍ VEČEŘI

Popis aktivity

Na jednoduchém problému úloha procvičuje objem komolého kuželu.

Předpokládané znalosti

Komolý kužel, objem, podobnost trojúhelníků

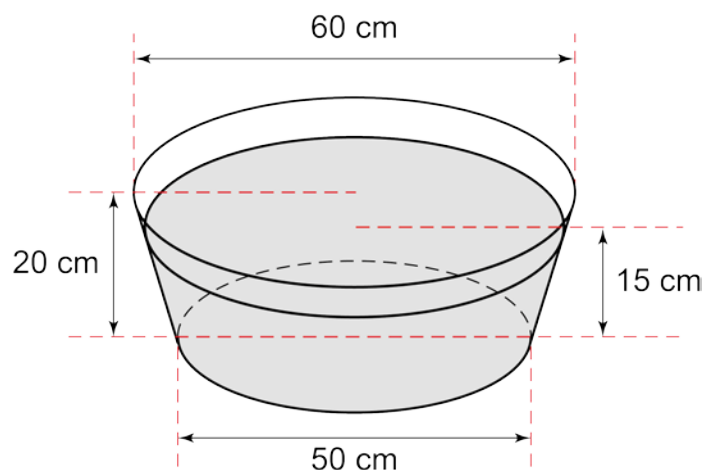
Potřebné pomůcky

rýsovací potřeby

Zadání

Trpaslíci si vaří večeři. Potřebují uvařit 3 l guláše. Do kotlíku naházeli 50 kousků brambor tvaru krychle s hranou délky 2 cm a 30 kousků masa tvaru krychle s hranou délky 3 cm. Ostatní zelenina a přísady zaujmají objem 0,3 l. Podle receptu mají ještě použít 1,5 l vody.

Hrncův tvar komolého kuželu. Hladina guláše může dosahovat nejvýše 5 cm pod okraj hrnce, aby bylo možné gulášem míchat. Rozměry hrnce jsou nakresleny na obrázku:



Vejde se trpaslíkům guláš do hrnce?

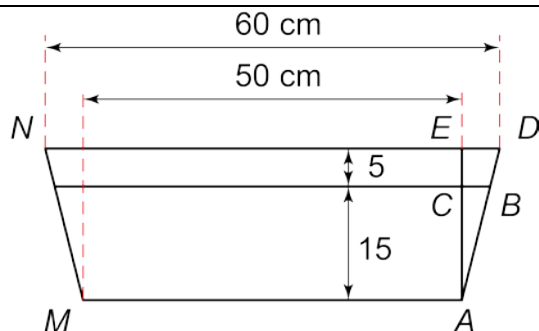
Možný postup řešení, metodické poznámky

Nejdříve vypočítáme maximální objem guláše, který se vejde do hrnce (brambory i maso jsou zcela ponořeny). Je třeba vypočítat objem komolého kuželu. Vyjdeme ze vzorce:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

Poloměr menší podstavy je $r_1 = 25$ cm, poloměr větší podstavy neznáme (jde o komolý kužel, který je „tvořen“ gulášem), výška se rovná 15 cm. Poloměr větší podstavy vypočítáme pomocí podobnosti trojúhelníků: ACB a AED :

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Poměr podobnosti je dán poměrem délek odpovídajících si stran, v našem případě známe délky stran AC a AE , pro výpočet neznámé délky $x = |CB|$ použijeme odpovídající stranu většího trojúhelníku, stranu ED .

Protože je hrncem tvaru komolého kuželu, je čtyřúhelník na obrázku rovnoramenný lichoběžník. Proto platí:

$$|ED| = \frac{1}{2} \cdot (|ND| - |MA|) = \frac{1}{2} \cdot (60 - 50) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Napišme vztah pro podobnost trojúhelníků ACB a AED :

$$p = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|ED|}$$

Znamé hodnoty dosadíme:

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{|AE|} &= \frac{|CB|}{|ED|} \\ \frac{15}{20} &= \frac{|CB|}{5} && | \cdot 5 \\ |CB| &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Poloměr větší podstavy se tedy rovná $r_2 = 25 + \frac{15}{4} = \frac{115}{4}$.

Můžeme vypočítat maximální možný objem připravovaného guláše:

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot \left(25^2 + 25 \cdot \frac{115}{4} + \left(\frac{115}{4} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot \left(625 + \frac{2875}{4} + \frac{13225}{16} \right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot \frac{625 \cdot 16 + 2875 \cdot 4 + 13225}{16} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1000 + 21500 + 13225}{16} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{35725}{16} \doteq 2337 \end{aligned}$$

V hrnci je možno uvařit nejvýše 2337 cm^3 guláše, což je 2,337 l guláše.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vypočtěme objem všech ingrediencí a vody (po převedení na cm^3):

$$V_i = 50 \cdot 2^3 + 30 \cdot 3^3 + 300 + 1500 = 50 \cdot 8 + 30 \cdot 27 + 300 + 1500 = 400 + 810 + 300 + 1500 = 3010 \text{ cm}^3$$

3,01 l

Objem všech ingrediencí a vody je 3010 cm^3 , tedy 3,01 l.

Vidíme, že guláš se trpaslíkům do zvoleného hrnce nevejde.

Doporučujeme obrázky promítnout dataprojektorem.

Doplňkové aktivity

S aktivitou souvisejí aktivity Hobiti si vaří večeři, Elfové si vaří večeři, Trollové si vaří večeři a Skřeti si vaří večeři. Jde o jednoduché úlohy na objem dalších rotačních těles.

Obrazový materiál

Dílo autora