evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost Jednota českých matematiků a fyziků

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VEKTORY JAKO KAPALINY

Popis aktivity

Řešení úlohy na míchání kapalin pomocí interpretace vektorů.

Předpokládané znalosti

Vektorový prostor, operace s vektory, grafické sčítání vektorů, hustota

Zadání

Budeme-li kapalinu K charakterizovat objemem $V\ (\mathrm{cm}^3)$ a hmotností $m(\mathrm{g})$ bez ohledu na ostatní fyzikální vlastnosti a chemické složení, pak můžeme každou kapalinu zapsat jako uspořádanou dvojici $K=(V,m)=(x,y)$, kde x,y jsou kladná čísla. Směs dvou kapalin $K_1=(V_1,m_1), K_2=(V_2,m_2)$ pak bude kapalina $K_3=(V_3,m_3)=(V_1+V_2,m_1+m_2)$, kterou můžeme nazvat součtem kapalin K_1,K_2. Jestliže t je libovolné kladné reálné číslo, můžeme zavést pojem součinu kladného reálného čísla s kapalinou K; je to kapalina L o objemu $t\cdot V$ a hmotnosti $t\cdot m$, tj. dvojice $L=(t\cdot V,t\cdot m)=t(V,m)$. Můžeme tedy kapaliny považovat za jistou interpretaci vektorů a vytváření směsí dvou kapalin lze chápat jako operace s vektory.

Je dána kapalina $K_1=(5,4)$. Máme k ní přidat kapalinu K_2, jejíž hustota je $\rho_2=\frac{5}{3}\ \mathrm{gcm}^{-2}$ tak, aby vzniklá směs měla hustotu $\rho_3=\frac{9}{8}\ \mathrm{gcm}^{-2}$.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Hustota neboli měrná hmotnost je definována jako podíl hmotnosti a objemu tělesa, tedy $\rho=\frac{V}{m}$. V našem případě je $\rho_1=\frac{4}{5}\ \mathrm{gcm}^{-3}$. Jestliže označíme $K_2=(x_2,y_2)$ a $K_3=(x_3,y_3)$, pak vzhledem k daným hodnotám ρ_2,ρ_3 je $K_2=\left(x_2,\frac{5}{3}x_2\right)$, $K_3=\left(x_3,\frac{9}{8}x_3\right)$ a můžeme psát:

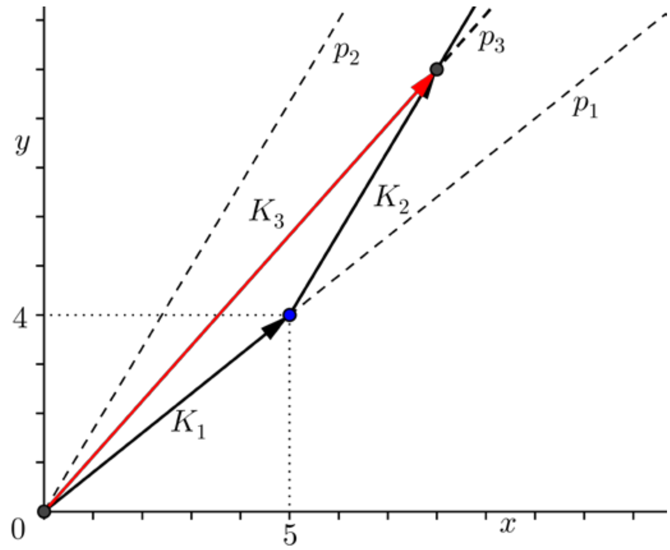
$$\begin{aligned} 5+x_2&=x_3\\ 4+\frac{5}{3}x_2&=\frac{9}{8}x_3 \end{aligned}$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic s neznámými x_2,x_3 (jedná se o kladná čísla), kterou vyřešíme metodou dosazovací. Po odstranění zlomků ve druhé rovnici a dosazením za x_3 z první rovnice máme rovnici ve tvaru $96+40x_2=27(5+x_2)$, ze které vyplývá, že $x_2=3$. Pak $x_3=8$ a pomocí daných hustot spočítáme $y_2=5, y_3=9$. Dosazením do rovnice $K_1+K_2=K_3$ provedeme zkoušku správnosti řešení.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

Aby tedy vznikla kapalina s hustotou $\rho_3 = \frac{9}{8}\ \mathrm{gcm}^{-2}$, je třeba ke kapalině K_1 přidat $3\ \mathrm{cm}^3$ kapaliny K_2.

Mnohem kratší a zajímavější je v tomto případě geometrická interpretace úlohy. Kapaliny budeme znázorňovat jako vektory orientovanými úsečkami. Je-li $\rho_2 = \frac{y_2}{x_2}$ a sestrojíme-li v soustavě souřadnic Oxy polopřímku p_2 o rovnici $y = \rho_2 x$, pak s touto přímkou jsou rovnoběžné všechny orientované úsečky, které zobrazují kapaliny o hustotě ρ_2 (obdobně pro ρ_3). Situaci znázorňuje obrázek.



Doplňkové aktivity

Pokud bychom úlohu řešili obecně, dostaneme pro x_2 vztah: $x_2 = \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_3 - \rho_2} x_1$ a tedy omezující podmínky pro zadané hustoty. Protože x_1, x_2 jsou čísla kladná, musí platit buď $\rho_1 > \rho_3 > \rho_2$ nebo $\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$.

Přesahy a vazby	*Chemie*
Obrazový materiál	http://office.microsoft.com/cs-cz/images/results.aspx?qu=pokusy#ai:MP900390519|