

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

FOTBALOVÝ MÍČ 3

Popis aktivity

Výpočty odchylek přímk a rovin v tělese, resp. velikostí úhlů, které svírají stěny a hrany v mnohostěnu.

Předpokládané znalosti

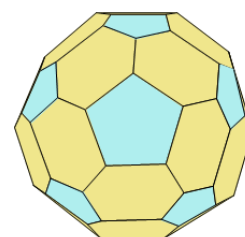
Odchylna roviny a přímky, odchylna dvou rovin. Definice a věty o kolmosti rovin a přímek

Potřebné pomůcky

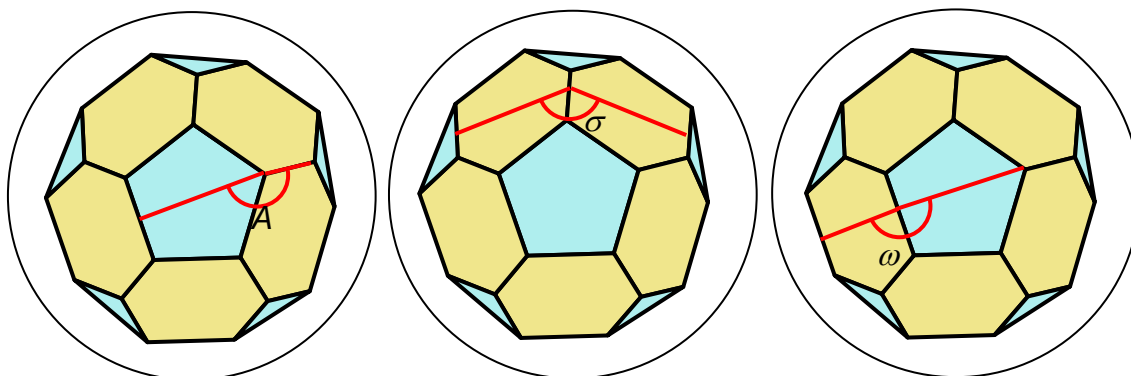
MFF tabulky

Zadání

Fotbalový míč má tvar mnohostěnu složeného z pravidelných pětiúhelníků a z pravidelných šestiúhelníků.



Každý vrchol je společný třem stěnám, z nichž dvě mají tvar pravidelného šestiúhelníku, třetí stěna má tvar pravidelného pětiúhelníku.

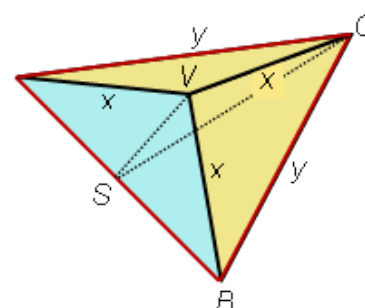
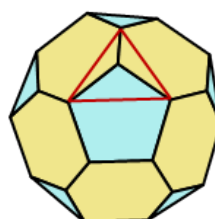


1. Jaký úhel svírá stěna tvaru pětiúhelníku s hranou mezi dvěma sousedními shodnými stěnami tvaru šestiúhelníku?
 2. Jaký úhel svírají dvě sousední shodné stěny?
 3. Jaký úhel svírají dvě sousední neshodné stěny ABV a VBN ?
- Úlohy řešte početně.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Všechny hrany mnohostěnu jsou stejně dlouhé, jejich délku označme symbolem x . Ze tří stěn s jedním společným vrcholem oddělíme trojboký jehlan. Jeho stěnami jsou rovnoramenné trojúhelníky. Právě dva z nich jsou shodné:

$$|AV| = |BV| = |CV| = x, |AC| = |BC| = y.$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úhly při vrcholu V mají velikosti $|\sphericalangle AVB| = 3 \cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$, $|\sphericalangle AVC| = |\sphericalangle BVC| = 120^\circ$.

Výpočet délek podstavných hran jehlanu:

$$\frac{|AS|}{x} = \sin \frac{108^\circ}{2}; |AS| = |BS| = x \cdot \sin 54^\circ; |AB| = 2|AS| = 2x \cdot \sin 54^\circ$$

$$y = 2x \cdot \sin \frac{120^\circ}{2} = 2x \cdot \sin 60^\circ = x \cdot \sqrt{3}$$

1. Jaký úhel svírá stěna tvaru pětiúhelníku s hranou mezi dvěma sousedními shodnými stěnami tvaru šestiúhelníku (úhel CVS)?

Velikost úhlu CVS označme φ . Délku strany CS lze spočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$|CS|^2 = y^2 - |AS|^2 = x^2(3 - \sin^2 54^\circ); |CS| = x \cdot \sqrt{3 - \sin^2 54^\circ}$$

V trojúhelníku ASV vypočteme délku strany SV : $|SV| = x \cdot \cos 54^\circ$

Velikost úhlu φ vypočteme pomocí kosinové věty:

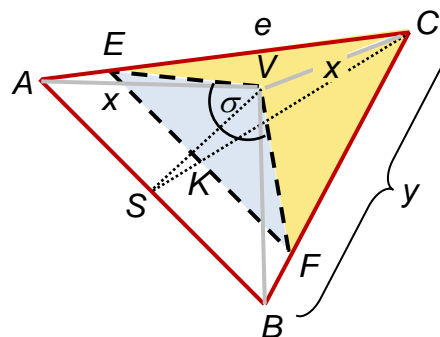
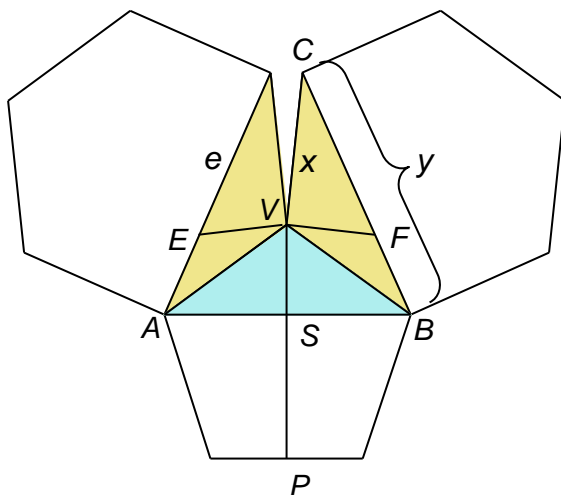
$$|SC|^2 = |SV|^2 + x^2 - 2x \cdot |SV| \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{x^2 \cdot \cos^2 54^\circ + x^2 - x^2(3 - \sin^2 54^\circ)}{2x^2 \cdot \cos 54^\circ} = \frac{\cos^2 54^\circ + \sin^2 54^\circ - 2}{2 \cdot \cos 54^\circ} = \frac{-1}{2 \cos 54^\circ}$$

$$\cos \varphi \doteq -0,85065$$

$$\varphi \doteq 148,28^\circ \doteq 148^\circ 16' 57''$$

2. Jaký úhel svírají dvě sousední shodné stěny ACV a BCV ? K určení odchylky dvou rovin je třeba sestavit řez rovinou kolmou k oběma daným rovinám.



Na prvním obrázku je zobrazena ta část pláště tělesa, která obsahuje oba sousedící šestiúhelníky. V této části je vyznačen plášť trojbokého jehlanu $ABCV$.

Na druhém obrázku je vyznačen řez jehlanu $ABCV$ rovinou, která prochází bodem V a je kolmá k oběma shodným stěnám ACV a BCV .

Úhel σ , který svírají sousední stěny ACV a BCV je pak shodný s úhlem EVF v rovině řezu.

Za jakých podmínek bude rovina řezu EFV kolmá k oběma stěnám?

Budou-li dvě různoběžky (EV a FV) roviny řezu kolmé k hraně CV (tj. k průsečnici obou rovin ACV a BCV), potom k hraně CV bude kolmá i celá rovina řezu. K rovině řezu pak bude kolmá i každá rovina, v níž hrana CV leží. Tedy rovina řezu bude kolmá k oběma stěnám ACV a BCV .

Hledaný úhel EVF má velikost σ . Polovinou rovnoramenného trojúhelníku EFV je pravoúhlý

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

trojúhelník EKV . Postupně určíme délky dvou jeho stran.

V rovnoramenném trojúhelníku AVC má úhel při vrcholu C velikost $\gamma_1 = 30^\circ$.

V pravoúhlém trojúhelníku CEV platí:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|EV|}{x}; |EV| = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{x}{|CE|} = \cos 30^\circ; |CE| = x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

V pravoúhlém trojúhelníku ASC je při vrcholu C úhel $\frac{\gamma}{2}$, pro nějž platí:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{|AS|}{y} = \frac{x \cdot \sin 54^\circ}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sin 54^\circ}{\sqrt{3}}$$

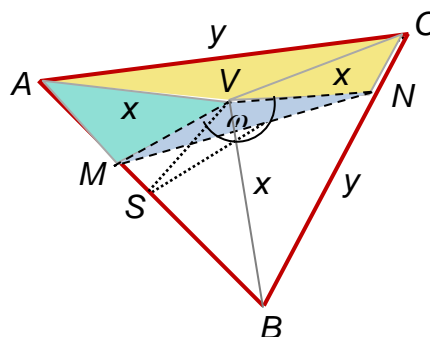
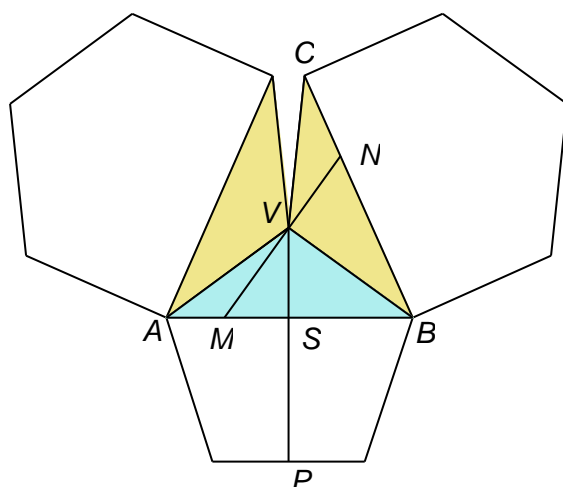
V pravoúhlém trojúhelníku EKC platí:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{|EK|}{|EC|} = \frac{\sqrt{3} \cdot |EK|}{2x} = \frac{\sin 54^\circ}{\sqrt{3}}; |EK| = \frac{2x \cdot \sin 54^\circ}{3};$$

V pravoúhlém trojúhelníku EKV platí:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{|EK|}{|EV|} = \frac{2x \cdot \sin 54^\circ}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sin 54^\circ}{\sqrt{3}} \doteq 0,934; \sigma \doteq 138,19 \doteq 138^\circ 11' 22,8''$$

3. Jaký úhel svírají dvě sousední neshodné stěny ABV a VBN ?



Sestrojíme řez jehlanu rovinou kolmou k oběma stěnám ABV a VBN . Rovina řezu obsahuje vrchol V a musí být kolmá k průsečnici BV . Řezem je trojúhelník MNV , kde $MV \perp BV$ a rovněž $NV \perp BV$. Hledaný úhel MVN má velikost ω . Budeme-li znát délky všech tří stran trojúhelníku MNV , velikost úhlu při vrcholu V se spočte užitím kosinové věty.

Délka úsečky NV v trojúhelníku BVC .

Úhel při vrcholu B má velikost $\beta_N = 30^\circ$. Platí:

$$|NV| = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}; |BN| = \frac{x}{\cos 30^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Délka úsečky MV v trojúhelníku ABV .

Úhel při vrcholu B má velikost $\beta_M = 36^\circ$. Platí:

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

$$|MV| = x \cdot \operatorname{tg} 36^\circ; |BM| = \frac{x}{\cos 36^\circ}$$

V trojúhelníku MBN resp. ABC pro velikost úhlu β při vrcholu B platí:

$$\cos \beta = \frac{|BS|}{y} = \frac{x \cdot \sin 54^\circ}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sin 54^\circ}{\sqrt{3}}$$

$$|MN|^2 = |BM|^2 + |BN|^2 - 2|BM| \cdot |BN| \cdot \cos \beta = \frac{x^2}{\cos^2 36^\circ} + \frac{4x^2}{3} - 2 \cdot \frac{2x^2}{\sqrt{3} \cdot \cos 36^\circ} \cdot \frac{\sin 54^\circ}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \omega = \frac{|MV|^2 + |NV|^2 - |MN|^2}{2|MV| \cdot |NV|} = \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 36^\circ + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{\cos^2 36^\circ} - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^2 \cdot \sin 54^\circ}{3 \cdot \cos 36^\circ}}{2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 36^\circ - 1 - \frac{1}{\cos^2 36^\circ} + \frac{4 \cdot \sin 54^\circ}{3 \cdot \cos 36^\circ}}{2 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-3 \cos 72^\circ - 3 + 4 \cdot \cos 36^\circ}{\sqrt{3} \cdot \sin 72^\circ} \doteq -0,794654472$$

$$\omega \doteq 142,623^\circ \doteq 142^\circ 37' 21,4''$$

Doplňkové aktivity

Zjistěte, zdali je možné postupovat v úloze 2 ještě jiným početním způsobem.

Jiný způsob řešení:

Úsečka EF je rovnoběžná s podstavnou hranou AB , úsečky EV a FV jsou kolmé k hraně CV .

Bod K je průsečík úsečky SC a úsečky EF . Protože úsečka KV leží v kolmé rovině řezu, je kolmá k hraně CV .

Pro potřeby výpočtu délky úsečky KV určíme velikost γ úhlu VCS . V trojúhelníku VCS platí:

$$\cos \gamma = \frac{|CV|^2 + |CS|^2 - |SV|^2}{2 \cdot |CV| \cdot |CS|} = \frac{x^2 + x^2(3 - \sin^2 54^\circ) - x^2 \cdot \cos^2 54^\circ}{2x^2 \cdot \sqrt{3} - \sin^2 54^\circ} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3} - \sin^2 54^\circ}$$

$$\cos \gamma \doteq 0,979432; \gamma \doteq 11,64^\circ \doteq 11^\circ 38' 26,6''$$

Pro výpočet úhlu σ , je třeba znát délky dvou stran pravouhlého trojúhelníku EKV .

Výpočet $|KV|$ v pravouhlém trojúhelníku KVC :

$$\frac{|KV|}{x} = \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1} = \sqrt{\frac{4 \cdot (3 - \sin^2 54^\circ)}{9} - 1} = \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 54^\circ}{3}}$$

$$|KV| = x \cdot \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 54^\circ}}{3} \doteq x \cdot 0,2685$$

Výpočet $|EK|$ z podobnosti trojúhelníků CEK a CAS :

$$\frac{|EK|}{|AS|} = \frac{|CK|}{|CS|}; |EK| = |AS| \cdot \frac{|CK|}{|CS|}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pomocný výpočet $|CK|$:

$$\frac{x}{|CK|} = \cos \gamma; |CK| = \frac{x}{\cos \gamma} = \frac{2x \cdot \sqrt{3 - \sin^2 54^\circ}}{3} \doteq 1,020999837x$$

$$|EK| = x \cdot \sin 54^\circ \cdot \frac{2x \cdot \sqrt{3 - \sin^2 54^\circ}}{3x \cdot \sqrt{3 - \sin^2 54^\circ}} = \frac{2}{3} x \cdot \sin 54^\circ = \frac{2}{3} |AS|$$

$$\frac{|EK|}{|KV|} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \frac{2 \cdot \sin 54^\circ}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 54^\circ}}; \sigma \doteq 138,1897 \doteq 138^\circ 11' 22,8''$$

Úlohu je možné řešit i graficky (viz Fotbalový míč 4).

Obrazový materiál

Dílo autora