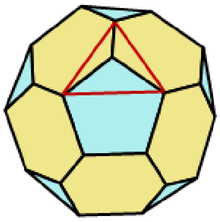
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

FOTBALOVÝ MÍČ 3

Všechny hrany mnohostěnu jsou stejně dlouhé, jejich délku označme symbolem x. Ze tří stěn s jedním společným vrcholem oddělíme trojboký jehlan. Jeho stěnami jsou rovnoramenné trojúhelníky. Právě dva z nich jsou shodné:
$|AV| = |BV| = |CV| = x$, $|AC| = |BC| = y$.



Úhly při vrcholu V mají velikosti $|\measuredangle AVB| = 3 \cdot 180° : 5 = 108°$, $|\measuredangle AVC| = |\measuredangle BVC| = 120°$.
Výpočet délek podstavných hran jehlanu:

$$\frac{|AS|}{x} = \sin\frac{108°}{2}; |AS| = |BS| = x \cdot \sin 54°; \ |AB| = 2|AS| = 2x \cdot \sin 54°$$

$$y = 2x \cdot \sin\frac{120°}{2} = 2x \cdot \sin 60° = x \cdot \sqrt{3}$$

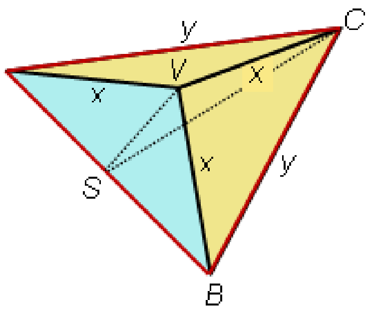
1. Jaký úhel svírá stěna tvaru pětiúhelníku s hranou mezi dvěma sousedními shodnými stěnami tvaru šestiúhelníku (úhel CVS)?

Velikost úhlu CVS označme φ. Délku strany CS lze spočítat pomocí Pythagorovy věty:
$|CS|^2 = y^2 - |AS|^2 = x^2(3 - \sin^2 54°)$; $|CS| = x \cdot \sqrt{3 - \sin^2 54°}$
V trojúhelníku ASV vypočteme délku strany SV: $|SV| = x \cdot \cos 54°$
Velikost úhlu φ vypočteme pomocí kosinové věty:
$|SC|^2 = |SV|^2 + x^2 - 2x \cdot |SV| \cdot \cos\varphi$

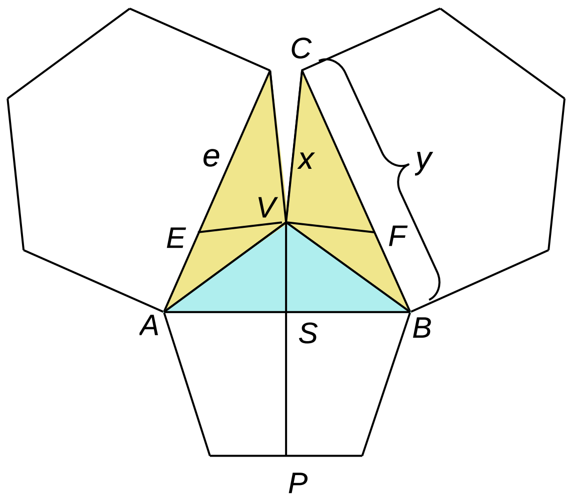
$$\cos\varphi = \frac{x^2 \cdot \cos^2 54° + x^2 - x^2(3 - \sin^2 54°)}{2\,x^2 \cdot \cos 54°} = \frac{\cos^2 54° + \sin^2 54° - 2}{2 \cdot \cos 54°} = \frac{-1}{2\cos 54°}$$

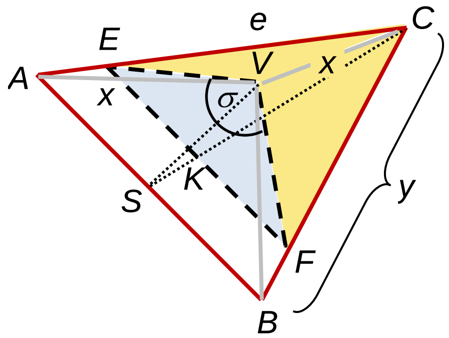
$\cos\varphi \doteq -\,0{,}85065$
$\varphi \doteq 148{,}28° \doteq 148°16'57''$

2. Jaký úhel svírají dvě sousední shodné stěny ACV a BCV? K určení odchylky dvou rovin je třeba sestrojit řez rovinou kolmou k oběma daným rovinám.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.





Na prvním obrázku je zobrazena ta část pláště tělesa, která obsahuje oba sousedící šestiúhelníky. V této části je vyznačen plášť trojbokého jehlanu $ABCV$.
Na druhém obrázku je vyznačen řez jehlanu $ABCV$ rovinou, která prochází bodem V a je kolmá k oběma shodným stěnám ACV a BCV.
Úhel σ, který svírají sousední stěny ACV a BCV je pak shodný s úhlem EVF v rovině řezu.
Za jakých podmínek bude rovina řezu EFV kolmá k oběma stěnám?
Budou-li dvě různoběžky (EV a FV) roviny řezu kolmé k hraně CV (tj. k průsečnici obou rovin ACV a BCV), potom k hraně CV bude kolmá i celá rovina řezu. K rovině řezu pak bude kolmá i každá rovina, v níž hrana CV leží. Tedy rovina řezu bude kolmá k oběma stěnám ACV a BCV.

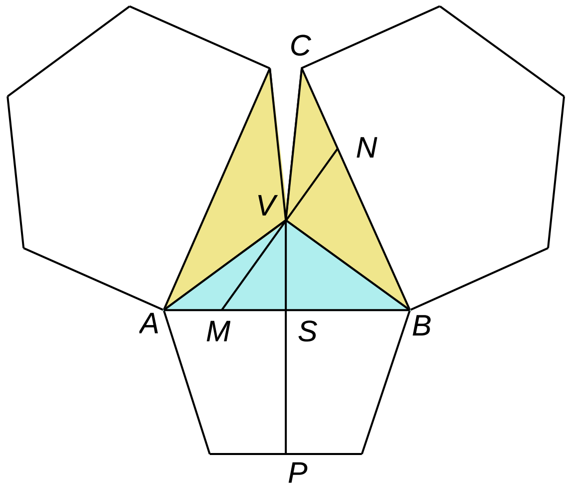
Hledaný úhel EVF má velikost σ. Polovinou rovnoramenného trojúhelníku EFV je pravoúhlý trojúhelník EKV. Postupně určíme délky dvou jeho stran.

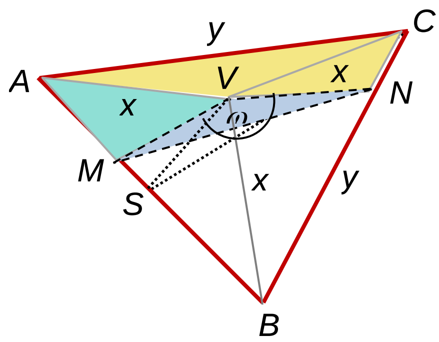
V rovnoramenném trojúhelníku AVC má úhel při vrcholu C velikost $\gamma_1 = 30°$.
V pravoúhlém trojúhelníku CEV platí:
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{|EV|}{x};\ |EV| = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{x}{|CE|} = \cos 30°\,;\ |CE| = x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
V pravoúhlém trojúhelníku ASC je při vrcholu C úhel $\frac{\gamma}{2}$, pro nějž platí:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{|AS|}{y} = \frac{x \cdot \sin 54°}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sin 54°}{\sqrt{3}}$$

V pravoúhlém trojúhelníku EKC platí:
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{|EK|}{|EC|} = \frac{\sqrt{3} \cdot |EK|}{2x} = \frac{\sin 54°}{\sqrt{3}};\ |EK| = \frac{2x \cdot \sin 54°}{3};$$
V pravoúhlém trojúhelníku EKV platí:
$$\sin\frac{\sigma}{2} = \frac{|EK|}{|EV|} = \frac{2x \cdot \sin 54°}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sin 54°}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}934;\ \sigma \doteq 138{,}19 \doteq 138°11'22{,}8''$$

3. Jaký úhel svírají dvě sousední neshodné stěny ABV a VBN?





Sestrojíme řez jehlanu rovinou kolmou k oběma stěnám ABV a VBN. Rovina řezu obsahuje vrchol V a musí být kolmá k průsečnici BV. Řezem je trojúhelník MNV, kde $MV \perp BV$ a rovněž $NV \perp BV$ Hledaný úhel MVN má velikost ω. Budeme-li znát délky všech tří stran trojúhelníku MNV, velikost úhlu při vrcholu V se spočte užitím kosinové věty.

Délka úsečky NV v trojúhelníku BVC.
Úhel při vrcholu B má velikost $\beta_N = 30°$. Platí:

$$|NV| = x \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{x}{\sqrt{3}};\ |BN| = \frac{x}{\cos 30°} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Délka úsečky MV v trojúhelníku ABV.
Úhel při vrcholu B má velikost $\beta_M = 36°$. Platí:

$$|MV| = x \cdot \operatorname{tg} 36°;\ |BM| = \frac{x}{\cos 36°}$$

V trojúhelníku MBN resp. ABC pro velikost úhlu β při vrcholu B platí:

$$\cos\beta = \frac{|BS|}{y} = \frac{x \cdot \sin 54°}{x \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sin 54°}{\sqrt{3}}$$

$$|MN|^2 = |BM|^2 + |BN|^2 - 2|BM| \cdot |BN| \cdot \cos\beta = \frac{x^2}{\cos^2 36°} + \frac{4x^2}{3} - 2 \cdot \frac{2x^2}{\sqrt{3} \cdot \cos 36°} \cdot \frac{\sin 54°}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\omega = \frac{|MV|^2 + |NV|^2 - |MN|^2}{2|MV| \cdot |NV|} = \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 36° + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{\cos^2 36°} - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^2 \cdot \sin 54°}{3 \cdot \cos 36°}}{2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} 36° \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 36° - 1 - \frac{1}{\cos^2 36°} + \frac{4 \cdot \sin 54°}{3 \cdot \cos 36°}}{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} 36°}{\sqrt{3}}} = \frac{-3\cos 72° - 3 + 4 \cdot \cos 36°}{\sqrt{3} \cdot \sin 72°} \doteq -0{,}794654472$$

$$\omega \doteq 142{,}623° \doteq 142°\, 37'\, 21{,}4''$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.