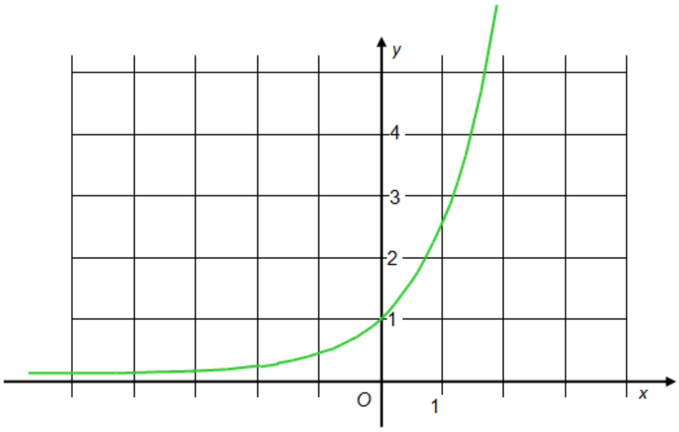
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KŘIVKA ZA PLOTEM 2

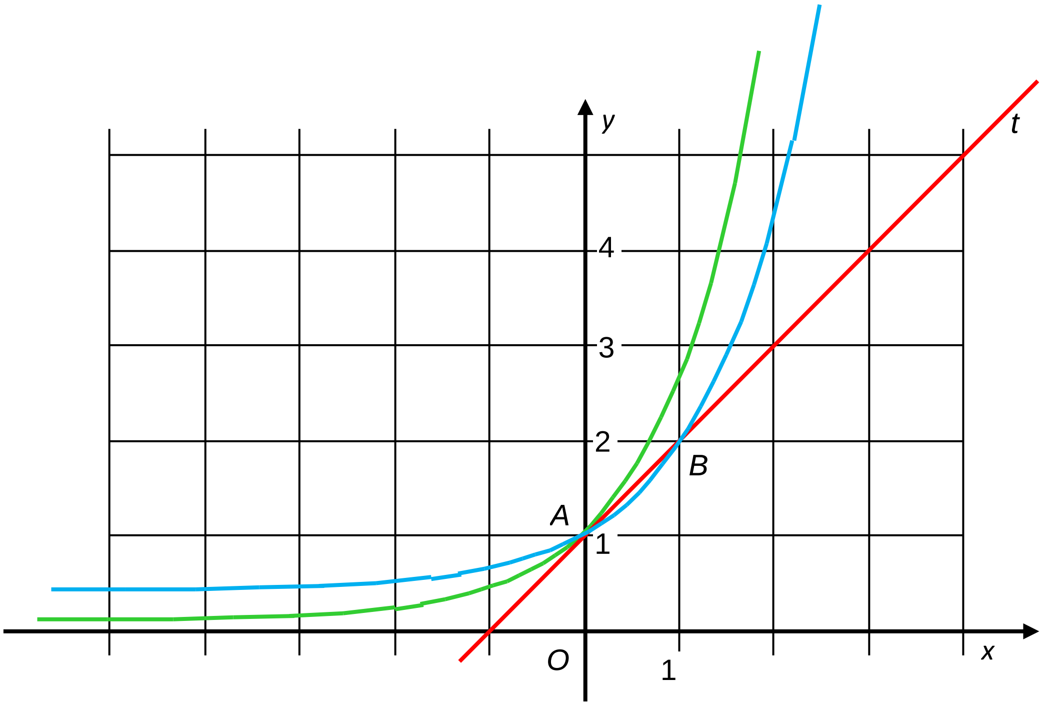
Popis aktivity
Odvození vztahu pro výpočet Eulerova čísla e.
Předpokládané znalosti
Tečna grafu funkce, směrnice tečny, exponenciální funkce
Potřebné pomůcky
Rýsovací potřeby
Zadání

V soustavě souřadnic je možné sestrojit graf funkce, který má v každém svém bodě $M[x, f(x)]$ tečnu se směrnicí $f(x)$. Pokud graf leží v prvním a druhém kvadrantu a prochází bodem $[0; 1]$, jedná se o exponenciální funkci s předpisem $y = a^x$. Tečnou v bodě $[0; 1]$ je přímka s předpisem $y = x + 1$.



Najděte hodnotu základu a.

Nápověda:



Sestrojíme přímku t se směrnicí 1, která prochází bodem $[0; 1]$ a je tečnou grafu exponenciální funkce s předpisem $y = a^x$s neznámým základem a.

Nejprve určíme základ pomocné exponenciální funkce s předpisem $y = b^x$, jejíž graf přímka t

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

protíná v bodech $A[0; 1]$ a $B[1; 2]$.

Postupně se bod B bude posunovat po přímce t směrem k bodu A, umístění bodu A zůstane beze změny. Pro každou novou dvojici bodů A a B určíme hodnotu základu b.

Jakmile se bod B posune nekonečně blízko k bodu A, přímka t se stane tečnou grafu hledané exponenciální funkce, jejíž základ hledáme.

Možný postup řešení, metodické poznámky

Sestavíme tabulku:

Souřadnice bodu B: $B\left[\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right]$	Dosazení souřadnic bodu do rovnice exponenciální funkce: $y = b^x$	Úprava rovnice	Výpočet základu b
$B[1; 2]$.	$2 = b^1$		2
$B\left[\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}\right]$	$\frac{3}{2} = b^{\frac{1}{2}}$	$b = \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\frac{9}{4} = 2{,}25$
$B\left[\frac{1}{3}; 1+\frac{1}{3}\right]$	$\frac{4}{3} = b^{\frac{1}{3}}$	$b = \left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\frac{64}{27} \doteq 2{,}\overline{370}$
	…		
$B\left[\frac{1}{10}; 1+\frac{1}{10}\right]$	$\frac{11}{10} = b^{\frac{1}{10}}$	$b = \left(\frac{11}{10}\right)^{10}$	$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \doteq 2{,}25937\ldots$
	…		
$B\left[\frac{1}{100}; 1+\frac{1}{100}\right]$	$\frac{101}{100} = b^{\frac{1}{100}}$	$b = \left(\frac{101}{100}\right)^{100}$	$\left(\frac{101}{100}\right)^{100} \doteq 2{,}704813\ldots$
	…		
$B[0{,}001; 1{,}001]$	$1{,}001 = b^{\frac{1}{1000}}$	$b = 1{,}001^{1\,000}$	$1{,}001^{1\,000} \doteq 2{,}71692\ldots$
	…		
$B[0{,}000\,001; 1{,}000\,001]$	$1{,}000\,001 = b^{\frac{1}{100\,000}}$	$b =$	$1{,}000\,001^{100\,000} \doteq 2{,}71826$
	…		
$B\left[\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right]$	$\frac{n+1}{n} = b^{\frac{1}{n}}$	$b = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}27182\ldots$

Základ exponenciální funkce je tzv. Eulerovo číslo e, tj. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Doplňkové aktivity

Prostřednictvím binomické věty proveďte rozvoj výrazu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Řešení:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots =$$

$$= 2 + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \binom{n}{4}\cdot\frac{1}{n^4} + \binom{n}{5}\cdot\frac{1}{n^5} + \cdots + \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots$$

Obrazový materiál	Dílo autora

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.