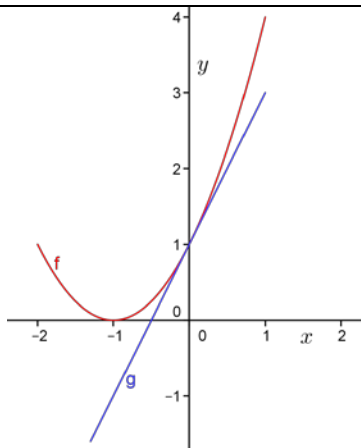


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NÁHRADNÍCI

Popis aktivity
Odvození přibližného vztahu, který nahrazuje hodnotu mocninné funkce pro některé hodnoty proměnných.
Předpokládané znalosti
Mocninné funkce, n -tá mocnina dvojklepu, lineární funkce, binomická věta
Zadání
<p>Jsou dány výrazy:</p> <p>a) $U(x) = (1+x)^2, U'(x) = 1+2x$</p> <p>b) $V(x) = (1+x)^3, V'(x) = 1+3x$</p> <p>c) $W(x) = (1+x)^4, W'(x) = 1+4x$</p> <p>Určete hodnoty daných výrazů pro $x = 0,1, x = -0,1, x = 0,01, x = -0,01$, porovnejte tyto hodnoty, načrtněte grafy odpovídajících mocninných a lineárních funkcí a pokuste se o zobecnění.</p>
Možný postup řešení, metodické poznámky
<p>a) $U(0,1) = (1+0,1)^2 = 1,1^2 = 1,21$ $U'(0,1) = 1+2 \cdot 0,1 = 1+0,2 = 1,2$ $U(0,1) > U'(0,1), U(0,1) - U'(0,1) = 1,21 - 1,2 = 0,01$</p> <p>$U(-0,1) = (1-0,1)^2 = 0,9^2 = 0,81$ $U'(-0,1) = 1-2 \cdot 0,1 = 1-0,2 = 0,8$ $U(-0,1) > U'(-0,1), U(-0,1) - U'(-0,1) = 0,81 - 0,8 = 0,01$</p> <p>$U(0,01) = (1+0,01)^2 = 1,01^2 = 1,0201$ $U'(0,01) = 1+2 \cdot 0,01 = 1+0,02 = 1,02$ $U(0,01) > U'(0,01), U(0,01) - U'(0,01) = 1,0201 - 1,02 = 0,0001$</p> <p>$U(-0,01) = (1-0,01)^2 = 0,99^2 = 0,9801$ $U'(-0,01) = 1-2 \cdot 0,01 = 1-0,02 = 0,98$ $U(-0,01) > U'(-0,01), U(-0,01) - U'(-0,01) = 0,9801 - 0,98 = 0,0001$</p> <p>Budeme-li uvažovat funkce $f: y = (1+x)^2$ a $g: y = 1+2x$, pak můžeme říci, že hodnoty těchto funkcí se pro daná (tedy malá) x příliš neliší. Podíváme-li se na grafy těchto funkcí, vidíme, že v okolí bodu 0 grafy obou funkcí „skoro“ splývají.</p>

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



$$\text{b) } V(0,1) = (1+0,1)^3 = 1,1^3 = 1,331$$

$$V'(0,1) = 1 + 3 \cdot 0,1 = 1 + 0,3 = 1,3$$

$$V(-0,1) = (1-0,1)^3 = 0,9^3 = 0,729$$

$$V'(-0,1) = 1 - 3 \cdot 0,1 = 1 - 0,3 = 0,7$$

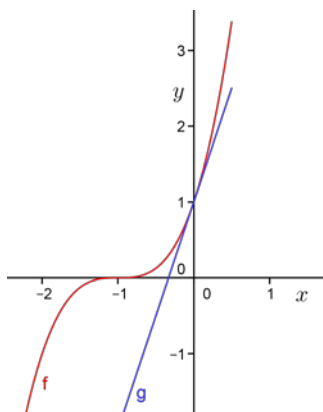
$$V(0,01) = (1+0,01)^3 = 1,01^3 = 1,030301$$

$$V'(0,01) = 1 + 3 \cdot 0,01 = 1 + 0,03 = 1,03$$

$$V(-0,01) = (1-0,01)^3 = 0,99^3 = 0,970299$$

$$V'(-0,01) = 1 - 3 \cdot 0,01 = 1 - 0,03 = 0,97$$

Také v tomto případě vidíme stejný výsledek, grafy obou funkcí naše výpočty potvrdí.



$$\text{c) } W(0,1) = (1+0,1)^4 = 1,1^4 = 1,4641$$

$$W'(0,1) = 1 + 4 \cdot 0,1 = 1 + 0,4 = 1,4$$

$$W(-0,1) = (1-0,1)^4 = 0,9^4 = 0,6561$$

$$W'(-0,1) = 1 - 4 \cdot 0,1 = 1 - 0,4 = 0,6$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

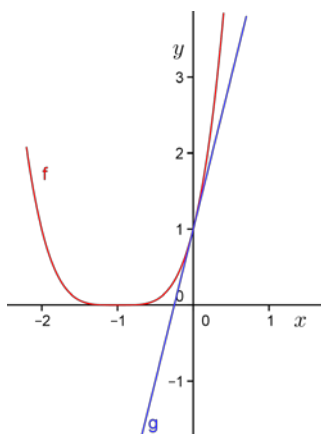
$$W(0,01) = (1+0,01)^4 = 1,01^4 = 1,04060401$$

$$W'(0,01) = 1 + 4 \cdot 0,01 = 1 + 0,04 = 1,04$$

$$W(-0,01) = (1-0,01)^4 = 0,99^4 = 0,96059601$$

$$W'(-0,01) = 1 - 4 \cdot 0,01 = 1 - 0,04 = 0,96$$

Také tento případ potvrzuje předcházející případy.



Tedy usuzujeme, že čím menší bude x , tím méně se budou hodnoty obou funkcí lišit.

Obecně: $(1+x)^n \approx 1+nx$, kde $n \in \mathbb{N}$, $|x| < 1$. Vlastně tím říkáme, že pro velmi malá x zanedbáváme v binomickém rozvoji členy kvadratické a vyšší.

Připomeneme, že:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot x^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 1^{n-(n-1)} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^{n-n} \cdot x^n$$

Doplňkové aktivity

Žáci mohou zkusit určovat hodnoty daných výrazů pro další (menší i větší) hodnoty x a porovnávat dosahované výsledky. Jistě dokážou vyslovit domněnku, že čím menší bude x , tím menší chyby se dopustíme, použijeme-li k výpočtu uvedený přibližný vztah.

Obrazový materiál

Dílo autora