evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jednota českých matematiků a fyziků
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TROJÚHELNÍKY V PROSTORU

Popis aktivity

Určení množiny bodů v prostoru, které mají danou vlastnost.

Předpokládané znalosti

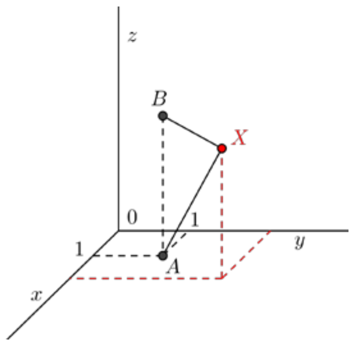
Souřadnice vektoru v prostoru, skalární součin, vektory k sobě kolmé, analytické vyjádření kulové plochy

Zadání

V prostoru jsou umístěny dva body – bod $A[1;1;0]$ a bod $B[1;1;2]$. Máme najít bod X tak, aby trojúhelník ABX s pravým úhlem při vrcholu X byl pravoúhlý.

a) Kolik je takových trojúhelníků?
b) Co je množinou všech bodů X v prostoru, které mají požadovanou vlastnost?

Možný postup řešení, metodické poznámky



a) Takových trojúhelníků je nekonečně mnoho – body A, B s bodem X vždy určují rovinu (pokud by rovinu neurčovaly, pak by bod X ležel na přímce určené body A, B, ale pak by trojúhelník ABX neexistoval) a v každé takové rovině je množinou bodů s požadovanou vlastností kružnice nad průměrem AB (kromě bodů A, B) – viz obrázek.

b) Máme-li určit analytické vyjádření množiny všech bodů X v prostoru, můžeme postupovat dvěma způsoby – buď využijeme Pythagorovy věty, nebo vlastnosti skalárního součinu.

V obou případech označíme $X[x;y;z]$ a zavedeme vektory

$\vec{u} = A - X = (1-x;1-y;-z), \vec{v} = B - X = (1-x;1-y;2-z)$ a při druhém způsobu využijeme toho, že pokud mají být tyto vektory k sobě kolmé, pak jejich skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ musí být roven nule.

Tedy v našem případě $(1-x)\cdot(1-x)+(1-y)\cdot(1-y)+(2-z)\cdot(-z)=0$

Po úpravě $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2-2z=0$

Jestliže k oběma stranám rovnice přičteme číslo 1, pak dostáváme rovnici

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$, což je analytické vyjádření kulové plochy se středem v bodě $[1;1;1]$ a poloměrem $r=1$.

Množinou všech bodů X v prostoru, pro které platí $|\angle AXB| = \frac{\pi}{2}$, je kulová plocha s průměrem AB bez bodů A, B.

Doplňkové aktivity

Pokud jsme řešili úlohu pomocí skalárního součinu, mohou žáci zopakovat řešení užitím Pythagorovy věty (a obráceně – pokud jsme zvolili např. na návrh žáků postup užitím Pythagorovy věty, připomeneme jim vlastnost vektorů k sobě kolmých).

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je M. Hrubá
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.