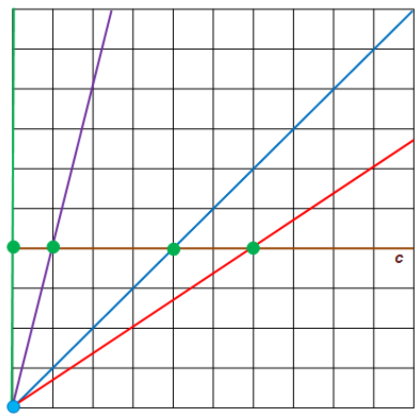
ČÁRY A BODY 1

Popis aktivity
Práce v oboru přirozených čísel (určování společného dělitele, soudělných a nesoudělných čísel). Použití operace celá část čísla.
Předpokládané znalosti
Vlastnosti přirozených čísel, operace s přirozenými čísly. Osová souměrnost. Orientovaná úsečka, souřadnice bodů a vektorů.
Potřebné pomůcky
Zadání

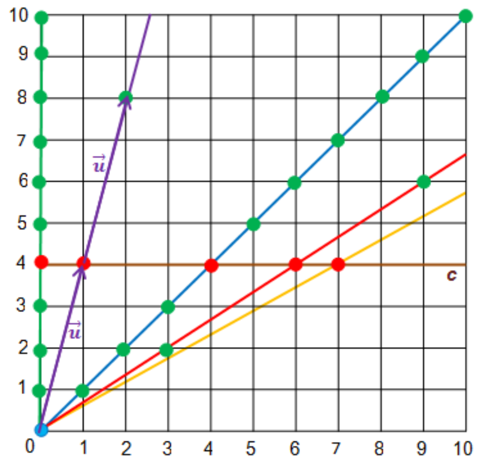
Čtvercová síť má 10 krát 10 polí. Vodorovná úsečka c je umístěna tak, že odděluje dolní čtyři řady polí od horních šesti řad polí. Sestrojte polopřímku, která prochází mřížovým bodem v levém dolním rohu čtvercové sítě a libovolným mřížovým bodem na přímce c. Poté vyznačte čáru (úsečku), která je průnikem polopřímky a čtvercové sítě.



A) Kolik čar vyhovuje daným podmínkám?
B) Kolik takových čar prochází právě dvěma mřížovými body?
C) Kolik mřížových bodů leží na všech čarách vyhovujících podmínkám ze zadání?

Možný postup řešení, metodické poznámky

A) Na přímce c je 11 mřížových bodů a každým z nich prochází jedna čára.
Daným podmínkám vyhovuje 11 čar.



B) Každou čáru lze jednoznačně určit bodem v levém dolním rohu (tj. počátkem soustavy souřadnic) a mřížovým bodem na přímce c se souřadnicemi $[x; 4]$, kde $x \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$. Vektor $\vec{u} = (x; 4)$ posouvá počátek do mřížového bodu, který je průsečíkem čáry s přímkou c. (Současně se jedná o směrový vektor $\vec{u}$ přímky, jejíž součástí je čára.)
Např. vyznačená zelená čára má vektor posunutí (směrový vektor) $\vec{u} = (0;\ 4)$, fialová čára $\vec{u} = (1;\ 4)$, modrá $\vec{u} = (4;\ 4)$, červená $\vec{u} = (6;\ 4)$ a žlutá $\vec{u} = (7;\ 4)$.

Může nastat situace, kdy průsečík čáry s přímkou c není prvním mřížovým bodem na čáře. To nastává v případě, že největší společný dělitel obou souřadnic vektoru $\vec{u}$ je větší než 1 ($D(x; 4) > 1$). Tímto společným dělitelem D se obě souřadnice vektoru $\vec{u}$ vydělí a získáme tak nejmenší, tzv. „mřížový vektor“ $\vec{m}$.
Např. červená čára má vektor posunutí $\vec{u} = (6;\ 4)$.
Obě souřadnice jsou dělitelné největším společným dělitelem $D(6; 4) = 2$.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je E. Řídká
Financováno z ESF a státního rozpočtu ČR.

„Mřížový vektor“ je $\vec{m} = \frac{1}{D(6;4)} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = (3;4)$.

Největší celé číslo, kterým lze vynásobit mřížový vektor, aniž by jeho koncový bod „utekl“ z pravoúhlé sítě, udává i počet mřížových bodů, kterými čára prochází (kromě počátku).

$\vec{u} = (x,4)$	Nejmenší „mřížový vektor“ $\vec{m} = (a,b) = \frac{1}{D(x;4)} \cdot \vec{u}$	Největší možné násobky první (p) a druhé (d) souřadnice vektoru $\vec{m}$.		Největší možný násobek mřížového vektoru, jehož koncový bod zůstane v dané pravoúhlé síti, tj. menší z čísel p, d.
		$p = \left[\frac{10}{a}\right]$	$d = \left[\frac{10}{b}\right]$	
$(0;4)$	$(0;1)$	∞	10	10
$(1;4)$	$(1;4)$	10	2	2
$(2;4)$	$(1;2)$	10	5	5
$(3;4)$	$(3;4)$	3	2	2
$(4;4)$	$(1;1)$	10	10	10
$(5;4)$	$(5;4)$	2	2	2
$(6;4)$	$(3;2)$	3	5	3
$(7;4)$	$(7;4)$	1	2	1
$(8;4)$	$(2;1)$	5	10	5
$(9;4)$	$(9;4)$	1	2	1
$(10;4)$	$(5;2)$	2	5	2
Celkový počet mřížových bodů, které leží na čarách, kromě počátečního bodu				43

Poznámka: $[p]$, resp. $[d]$ je výsledek celočíselného dělení, neboli celá část čísla p a d (tj. výsledek bez části čísla za desetinnou čárkou). Platí $[p] \leq p < [p] + 1$.

Jen dvě čáry obsahují právě dva mřížové body včetně počátečního bodu.

C)

Počet všech mřížových bodů, kterými čáry procházejí, udává součet čísel v posledním sloupci zvětšený o 1 (o počáteční bod).

Z celkového počtu 121 mřížových bodů pravoúhlé sítě (10 krát 10 polí) leží na všech 11 čarách vyhovujících podmínkám ze zadání celkem 44 mřížových bodů.

Doplňkové aktivity

Řešte podobnou úlohu pro jiné umístění vodorovné přímky c. Např. při rozdělení sítě přímkou c na dvě stejné části dostaneme výsledky:

A) 11

B) 5

C) $10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ počátek, tj. 35 mřížových bodů.

Obrazový materiál	Dílo autora